Grundzüge

einer

allgemeinen axonometrischen Theorie

der

darstellenden Perspective.

In zwei Abschnitten:

I. Planperspective. — II. Perspectivische und projectivische Collineation im Raum.

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der naturwissenschaftlichen Doctorwürde an der Universität Tübingen

vorgelegt von

Guido Hauck,

Professor an der Oberrealschule zu Tübingen.

Dresden,

Druck von B. G. Teubner.

1876.

Grundzüge einer allgemeinen axonometrischen Theorie der darstellenden Perspective.

Erster Abschnitt.

Planperspective.

(Zeitschrift für Mathematik und Physik XXI, S. 81 figg.)

(Hierzu Taf. I.)

Definiren wir die Axonometrie allgemein als Methode, welche lehrt, perspectivische Bilder von Objecten, die durch die rechtwinkligen Coordinaten ihrer Punkte gegeben sind, dadurch zu verfertigen, dass die projicirenden Parallelepipeda der einzelnen Objectpunkte abgebildet werden, so müssen wir die Vaterschaft dieser Disciplin Desargues zuerkennen. Seine „*Méthode universelle de mettre en perspective les objets donnés réellement ou en devis etc.*“ (*Paris* 1636)* behandelt die Centralperspective in dem genannten Sinne und stellt damit die Grundzüge der axonometrischen Methode fest. Die eigentliche Carrière der Axonometrie knüpft sich jedoch erst an die Namen Weisbach und Pohlke. Erst durch die Einführung der rationalen Verhältnisse der Einheiten der Massstäbe** und die Aufstellung und Verwerthung des Pohlke'schen Satzes*** hat die an und für sich alte Methode die Leichtigkeit und Handlichkeit erlangt, die eben das Charakteristische der modernen Axonometrie ausmacht. Beide Errungenschaften erstrecken sich nun aber blos auf die Parallelperspective. Wir hatten bisher in der Centralperspective weder ein Analogon für die rationalen Verhältnisse der Mass-

---

* Vergl. *Oeuvres de Desargues réunies et analysées par M. Poudra. Paris 1864. T. 1, pag. 55—95.*

** Vergl. Weisbach, Die monodimetrische und anisometrische Projectionsmethode. In den polytechn. Mittheilungen von Volz und Karmarsch. Tübingen 1844. S. 125—140.

*** Vergl. Pohlke, Darstellende Geometrie, I. Abthlg., 3. Aufl. Berlin 1872 S. 112—115. — Ferner: Schwarz, Elementarer Beweis des Pohlke'schen Fundamentalsatzes der Axonometrie. In Crelle's Journal Bd. 63, S. 309—314.

stäbe, noch für den Pohlke'schen Satz. So kam es, dass trotz Desargues' Anregung die moderne Axonometrie die Centralperspective ganz ausserhalb ihres Bereichs liess. — Eine leidige Folge hiervon war, dass sich für die Centralperspective und Parallelperspective zwei von Grund aus verschiedene Behandlungsweisen ausbildeten, welche beide Perspectiven als ihrem Wesen nach heterogen erscheinen lassen, während doch in Wahrheit die eine nur ein Specialfall der andern ist.

In einer im verflossenen Sommersemester an hiesiger Hochschule von mir gehaltenen Vorlesung über Perspective suchte ich die oben angedeuteten Lücken auszufüllen durch Aufstellung einer allgemeinen axonometrischen Theorie und damit gleichzeitig einen einheitlichen Gesichtspunkt zu gewinnen, von dem aus sich das gesammte Gebiet der darstellenden Perspective, incl. Reliefperspective, behandeln lässt. Durch diese Theorie wird vor Allem zwischen der Centralperspective und Parallelperspective die gebührende enge Beziehung hergestellt, insofern sich sämmtliche axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective unmittelbar aus denen der Centralperspective als einfache Modificationen ergeben. Durch die Constatirung der Thatsache, dass den bekannten axonometrischen Grundformeln der Parallelperspective auch eine Bedeutung in der Centralperspective zukommt,* gewinnen diese ein neues Interesse. Der Umstand ferner, dass die allgemein übliche Methode der Linearperspective sich aus unserer Theorie gleichsam spielend ergiebt,** lässt auch diese in einem neuen Lichte erscheinen.

Vorliegender Aufsatz ist ein Auszug aus den genannten Vorlesungen

---

§ 1.
Exposition.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem $O, x\,y\,z$ *** bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen centralperspectivisches Bild zu construiren, wenn die relative Lage von Bildebene und Auge gegen das Object gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der Dreistrahl $\Omega, \xi\,\eta\,\zeta$. (Taf. I, Fig. 1.) Derselbe ist bestimmt durch die drei Winkel $\xi\Omega\eta$, $\eta\Omega\zeta$, $\zeta\Omega\xi$, die wir die scheinbaren Axenwinkel nennen und mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen.

---

* Vergl. z. B. Gleichungen 39) und 56).

** Vergl. S. 18, Z. 20 flgg.

*** Mit Rücksicht auf Objecte aus der Natur denken wir uns die z-Axe vertical.

Wir denken uns ferner die x-Coordinaten der einzelnen Punkte des Objects auf der x-Axe aufgetragen, sie seien $OX = x$, $OX' = x'$, $OX'' = x''$ u. s. f. Die Bilder der Punkte X, X', ... seien Ξ, Ξ', ... Wir bezeichnen die Abscissen dieser Punkte $\Omega\Xi$, $\Omega\Xi'$, ... durch ξ, ξ', ... und nennen diese Grössen die reducirten x-Coordinaten.

Es bilden nun die Punkte X und Ξ zwei projectivische Punktreihen. Jedem Punkte der einen Reihe entspricht ein und nur ein Punkt der andern Reihe. Der analytische Ausdruck hierfür ist eine zwischen den Abscissen x und ξ zweier entsprechenden Punkte X und Ξ bestehende Gleichung, die sowohl nach x als nach ξ linear ist und deren Absolutglied $= 0$ ist, weil für $x = 0$ auch $\xi = 0$ wird. Diese Gleichung sei

1) $$\alpha\xi - f_1 x - g_1 \xi = 0.$$

Dann folgt aus ihr für ξ der Ausdruck

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}.$$

Die geometrische Bedeutung der beiden Grössen f_1 und g_1 ergiebt sich leicht. Für $x = g_1$ wird $\xi = \infty$. Also ist g_1 die Abscisse desjenigen Punktes G_1 der Punktreihe X, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe Ξ entspricht. Andererseits zeigt die nach x aufgelöste Gleichung, dass f_1 die Abscisse desjenigen Punktes F_1 der Punktreihe Ξ ist, welcher dem unendlich entfernten Punkte der Reihe X entspricht. Wir nennen F_1 den Fluchtpunkt der ξ-Axe, G_1 den Gegenpunkt der x-Axe.*

Gleiches gilt für die zwei anderen Axen. Bezeichnen wir also die Fluchtpunkte der drei Axen mit F_1, F_2, F_3, und deren Abscissen mit f_1, f_2, f_3, ferner die drei Gegenpunkte mit G_1, G_2, G_3, und deren Abscissen mit g_1, g_2, g_3, so haben wir für die reducirten Coordinaten folgende Ausdrücke:

I. 2) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3}.$$

Wir nennen die drei Grössen f_i die drei Fluchtstrecken, die drei Grössen g_i die drei Gegenstrecken. Fluchtstrecken und Gegenstrecken fassen wir zusammen unter dem gemeinsamen Namen: die sechs Reductionsconstanten.

Vergegenwärtigen wir uns, dass die Bilder aller mit einer der drei Coordinatenaxen parallelen Geraden sich in dem zugehörigen Fluchtpunkte schneiden müssen, dass ferner die Verbindungslinien der drei

---

* Gewöhnlich gebraucht man für die Punkte F und G eine und dieselbe Benennung. Die Einführung verschiedener Namen in der darstellenden Perspective erscheint gerechtfertigt als mit der Unterscheidung zwischen Originalfigur und Bildfigur correspondirend. Wir werden ebenso in der Reliefperspective unterscheiden zwischen „Fluchtebene“ und „Gegenebene“.

Fluchtpunkte die Fluchtlinien der drei Coordinatenebenen sind, dass folglich z. B. alle mit der xy-Ebene parallelen Geraden ihre Fluchtpunkte in F_1F_2 haben: so ist es leicht, vorausgesetzt, dass die sechs Reductionsconstanten bekannt seien, das Bild des projicirenden Parallelepipedons irgend eines Objectpunktes P und damit das Bild Π dieses Punktes aufzutragen. Es ist jedoch einleuchtend, dass es nicht nothwendig ist, das vollständige Bild des Parallelepipedons zu zeichnen, um Punkt Π zu erhalten. Es genügt die Zeichnung des in der xy-Ebene liegenden Rechtecks $XOYp$ und des Diagonalrechtecks $ZOpP$. Man hat folgende Construction (Fig. 1):

Man trägt zuerst auf den scheinbaren Axen $\Omega\xi$, $\Omega\eta$, $\Omega\zeta$ die Strecken $\Omega F_1 = f_1$, $\Omega F_2 = f_2$, $\Omega F_3 = f_3$ ab und zieht F_1F_2, bestimmt sodann die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ des Punktes P nach den Gleichungen I und trägt dieselben auf den scheinbaren Axen in $\Omega\Xi$, ΩH, ΩZ auf. Zieht man hierauf ΞF_2 und HF_1, die sich in π schneiden, so ist $\Xi\Omega H\pi$ das Bild des Rechtecks $XOYp$. Man zieht nun $\Omega\pi$, welche F_1F_2 in D schneidet, dann ist D der Fluchtpunkt von $\Omega\pi$. Zieht man daher schliesslich ZD und πF_3, die sich in Π schneiden, so ist $Z\Omega\pi\Pi$ das Bild des Rechtecks $ZOpP$, also Π das Bild des Punktes P.

Aus diesen Betrachtungen geht hervor, dass zur Erledigung der an die Spitze dieses Paragraphen gestellten Aufgabe blos erforderlich ist die Ermittelung der drei scheinbaren Axenwinkel und der sechs Reductionsconstanten. Wir fassen daher diese neun Grössen zusammen unter dem Namen: die neun axonometrischen Grundconstanten. — Die sechs Grössen, durch welche die Lage von Bildebene und Auge gegen das Object bestimmt ist, nennen wir die sechs Orientirungsconstanten. Unsere Aufgabe kommt hiernach darauf hinaus, die neun axonometrischen Grundconstanten auszudrücken als Functionen der sechs Orientirungsconstanten.

§ 2.

Berechnung der Grundconstanten.

Die Lage des Auges A gegen das Object sei gegeben durch seine auf das Object-Coordinatensystem bezogenen Coordinaten a_1, a_2, a_3. Die Bildebene schneide die drei Coordinatenaxen in den Punkten M_1, M_2, M_3, ihre Lage gegen das Object sei gegeben durch die drei Axenabschnitte $OM_1 = m_1$, $OM_2 = m_2$, $OM_3 = m_3$. — a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3 sind also unsere sechs Orientirungsconstanten.

Der „Centralstrahl“ AO schneide die Bildeben in Ω. Dann ist Ω das Bild des Coordinatenursprungs; ΩM_1, ΩM_2, ΩM_3 sind die Bilder der drei Coordinatenaxen. Wir bezeichnen die drei Strecken ΩM_i mit

μ_i, ferner AO mit r, $A\Omega$ mit ϱ. — Legt man durch A eine Ebene parallel zur Bildebene, so schneidet diese die drei Axen in den drei Gegenpunkten G_1, G_2, G_3.

Die Gleichung dieser Parallelebene ist

3) $$\frac{x}{m_1}+\frac{y}{m_2}+\frac{z}{m_3}=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3}.$$

Führt man der Kürze halber die Bezeichnung ein

4) $$\varkappa=\frac{a_1}{m_1}+\frac{a_2}{m_2}+\frac{a_3}{m_3},$$

so erhält man aus Gleichung 3) für die drei Gegenstrecken die Werthe

5) $$g_i=\varkappa m_i.$$

Als geometrische Bedeutung der Hilfsgrösse $\varkappa$ folgt hieraus

6) $$\varkappa=\frac{g_i}{m_i}=\frac{r}{r-\varrho}.$$

Nach dieser Bemerkung haben die Coordinaten des Punktes Ω die Werthe $\frac{a_1}{\varkappa}$, $\frac{a_2}{\varkappa}$, $\frac{a_3}{\varkappa}$, und daher erhält man für die Strecken ΩM_i die Ausdrücke

7) $$\mu_i^2=\left(m_i-\frac{a_i}{\varkappa}\right)^2+\frac{a_k^2}{\varkappa^2}+\frac{a_l^2}{\varkappa^2}$$

oder, wenn man der Kürze halber die Bezeichnung einführt:

8) $$r^2=a_1^2+a_2^2+a_3^2,$$

9) $$\mu_i^2=m_i^2-2\,\frac{m_i a_i}{\varkappa}+\frac{r^2}{\varkappa^2}.$$

Diese Werthe setzen uns nunmehr in den Stand, die drei Fluchtstrecken zu berechnen. Da nämlich z. B. Punkt M_1 den zwei Punktreihen X und Ξ entsprechend gemein ist, so hat man vermöge Gleichung I:

10) $$\mu_i=\frac{f_i m_i}{m_i-g_i}=\frac{f_i m_i}{m_i-\varkappa m_i},$$

woraus

11) $$f_i=(1-\varkappa)\mu_i.$$

Schliesslich ergeben sich die Werthe für die drei scheinbaren Axenwinkel aus den drei Dreiecken $M_i\,\Omega\,M_k$:

12) $$cos\,w_{ik}=\frac{\mu_i^2+\mu_k^2-m_i^2-m_k^2}{2\,\mu_i\,\mu_k}.$$

Für gewisse Zwecke* ist es vortheilhafter, statt der Grössen a_i und m_i andere Orientirungsconstanten zu benützen. Wir bezeichnen die

---

* Vor Allem für den Fall, dass die Bildebene durch den Coordinatenursprung geht oder dass das Auge ins Unendliche fällt.

Richtungswinkel des Centralstrahls (d. s. die Winkel, die der Centralstrahl mit den drei Coordinatenaxen macht) mit σ_1, σ_2, σ_3 und nehmen die vier Grössen r, σ_1, σ_2, σ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage des Auges. Wir bezeichnen ferner den Abstand der Bildebene vom Coordinatenursprung mit ε, die Richtungswinkel von ε mit τ_1, τ_2, τ_3, und nehmen die vier Grössen ε, τ_1, τ_2, τ_3 als Bestimmungsgrössen für die Lage der Bildebene. — Um die Grundconstanten auszudrücken in diesen neuen Orientirungsconstanten, wenden wir auf die obigen Gleichungen die Transformationsformeln

13) $$a_i = r \cos \sigma_i ,$$

14) $$m_i = \frac{\varepsilon}{\cos \tau_i}$$

an und führen die Hilfsgrössen $\cos \varphi = \frac{\varepsilon}{r} \varkappa$ und $\nu_i = \frac{\mu_i}{\varepsilon}$ ein. Dabei bedeutet der Hilfswinkel φ den von ε und r eingeschlossenen Winkel. Man erhält auf diese Weise die Gleichungen in der rechten Columne der folgenden Zusammenstellung:

II. $$\varkappa = \frac{a_1}{m_1} + \frac{a_2}{m_2} + \frac{a_3}{m_3} ,$$

II′. $$\cos \varphi = \cos \sigma_1 \cos \tau_1 + \cos \sigma_2 \cos \tau_2 + \cos \sigma_3 \cos \tau_3 ,$$

III. $$\mu_i^2 = m_i^2 - 2 \frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2} ,$$

III′. $$\nu_i^2 = \frac{1}{\cos^2 \tau_i} - 2 \frac{\cos \sigma_i}{\cos \tau_i \cos \varphi} + \frac{1}{\cos^2 \varphi} ,$$

IV. $$g_i = \varkappa m_i ,$$

IV′. $$g_i = r \frac{\cos \varphi}{\cos \tau_i} ,$$

V. $$f_i = (1 - \varkappa) \mu_i ,$$

V′. $$f_i = (\varepsilon - r \cos \varphi) \nu_i ,$$

VI. $$\cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2}{2 \mu_i \mu_k} ,$$

VI′. $$\cos w_{ik} = \frac{\nu_i^2 + \nu_k^2 - \frac{1}{\cos^2 \tau_i} - \frac{1}{\cos^2 \tau_k}}{2 \nu_i \nu_k} .$$

§ 3.

Praktisches Verfahren. Reductionsmassstäbe.

Gleichung V liefert für die drei Fluchtstrecken nur die absoluten Werthe. Bezüglich der Vorzeichen, d. h. der Richtungen, in welchen diese absoluten Werthe auf den scheinbaren Axen vom Punkte $\mathfrak{Q}$ aus abzutragen sind, lässt sich leicht folgender Satz beweisen:

Liegen Coordinatenursprung und Bildebene auf einer und derselben Seite des Auges, so haben für jede der drei Coordinatenaxen die Abscissen von Fluchtpunkt und Gegenpunkt entgegengesetzte Vorzeichen. Liegt das Auge zwischen Coordinatenursprung und Bildebene, so haben sie gleiche Vorzeichen.

Im ersten Falle nennen wir das resultirende Bild ein directes, im letztern Falle ein inverses.*

Nach diesem Satze bestimmen sich die Vorzeichen der drei Grössen f_i aus denen der drei Grössen g_i. Für diese liefert Gleichung IV Zahlenwerth sammt Vorzeichen, und zwar lässt sich bezüglich letzterer vermöge Gleichung 6) folgender Satz aussprechen:

Die Abscissen der Gegenpunkte haben mit den entsprechenden Axenabschnitten gleiche oder entgegengesetzte Vorzeichen, je nachdem die Bildebene zwischen Auge und Coordinatenursprung oder hinter dem Coordinatenursprung liegt.

Bei der folgenden Darlegung des praktischen Verfahrens nehmen wir an, die Bildebene liege zwischen Auge und Coordinatenursprung, sie gehe im äussersten Falle durch den Coordinatenursprung; es sei also

15) $$r \geq \varrho > 0.$$

Ferner nehmen wir an, das Auge liege in dem von den positiven Aesten der drei Coordinatenaxen gebildeten Octanten, das Object liege dagegen in dem Octanten $-x$, $-y$, $+z$.** Die Bildebene wählen wir so, dass m_1, m_2, m_3 positiv sind oder dass sie parallel mit einer dieser Annahme entsprechenden Ebene durch den Ursprung gehe. Bei Zugrundelegung dieser Annahmen sind g_1, g_2, g_3 positiv, f_1, f_2, f_3 negativ.

Nachdem die Grundconstanten aus den Gleichungen II — VI berechnet sind, ferner das scheinbare Axensystem vermittelst der Winkel w_{12}, w_{23}, w_{31} gezeichnet ist (Taf. I, Fig. 2) und auf den negativen Aesten der scheinbaren Axen die Strecken $\Omega F_1 = f_1$, $\Omega F_2 = f_2$, $\Omega F_3 = f_3$ abgetragen sind, handelt es sich des Weitern darum, die reducirten Coordinaten ξ, η, ζ jedes einzelnen Objectpunktes zu bestimmen. Hierzu können die Gleichungen I benützt werden; ein graphisches Reductionsverfahren ist jedoch vorzuziehen.

Ein solches ergiebt sich aus dem bekannten Satze, dass zwei projectivische Punktreihen jederzeit, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können; man hat sie nur so zu legen, dass irgend ein Paar entsprechender Punkte zusammenfällt; das Projectionscentrum ergiebt sich alsdann als Schnitt der Verbindungslinien irgend zweier Punkte der einen Punktreihe mit den homologen Punkten der andern. Wir legen nun die zwei projectivischen

---

* Die inversen Bilder bieten ein nicht geringeres Interesse als die directen, insofern sie identisch sind mit den von einer Sammellinse entworfenen reellen Bildern. (Auge im optischen Mittelpunkte der Linse.)

** Diese Annahme hat den Zweck, die Lage des Objects hinter der Bildebene zu ermöglichen, auch für den Fall, dass letztere durch den Coordinatenursprung geht. Eine gegebenen Falls nothwendige Transformation auf diesen Octanten bietet keine Schwierigkeit.

Punktreihen X und Ξ so, dass die Punkte O und Ω zusammenfallen, und benützen zur Bestimmung des Projectionscentrums einerseits den unendlich fernen Punkt der Reihe X und dessen homologen Punkt F_1 der Reihe Ξ, andererseits den unendlich fernen Punkt der Reihe Ξ und dessen homologen Punkt G_1 der Reihe X. — Es ergiebt sich hiernach folgendes praktische Reductionsverfahren:*

Ziehe durch einen Punkt O (Taf. I, Fig. 3) unter beliebigem Winkel zwei unbegrenzte Gerade $x'x$ und $\xi'\xi$, Ox und $O\xi$ seien ihre positiven Aeste. Schneide auf $O\xi'$ eine Strecke $OF_1 = f_1$ ab, ziehe durch F_1 eine Parallele mit Ox und mache auf ihr $F_1C_1 = g_1$. Um nun vermittelst dieses Apparates irgend ein x zu reduciren, mache auf $x'x$ eine Strecke $OX = x$, ziehe C_1X, welche $\xi'\xi$ in Ξ schneidet, so ist $O\Xi = \xi$.

Für die y- und z-Axe gilt genau dasselbe Verfahren. Es möge blos daran erinnert werden, dass nach der zu Grunde gelegten Annahme die x und y negativ, folglich auf den negativen Zweigen Ox' und Oy' aufzutragen sind, dass dagegen die z als positiv auf dem positiven Zweige Oz aufzutragen sind.

Reductionsmassstäbe, von welchen die ξ, η, ζ direct abgenommen werden können, falls die x, y, z in Masszahlen gegeben sind, erhält man, wenn man auf $x'x$, $y'y$, $z'z$ von O aus den Originalmassstab aufträgt, von C_i aus durch die einzelnen Theilpunkte Strahlen zieht und deren Schnittpunkte mit $\xi'\xi$, $\eta'\eta$, $\zeta'\zeta$ markirt.

Es kann übrigens (Taf. I, Fig. 4) der Reductionsapparat auch der Hauptfigur selbst einverleibt werden. Um z. B. die x und y zu reduciren, ziehe man durch Ω eine Parallele mit F_1F_2, trage auf ihr von Ω aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, mache auf F_1F_2 die Strecke $F_1C_1 = g_1$ und $F_2C_2 = g_2$, und ziehe von C_1 und C_2 Strahlen nach den einzelnen Theilpunkten des Originalmassstabes. Wir nennen bei diesem Verfahren die Punkte C_1 und C_2 die Theilungspunkte der ξ- und η-Axe.

Will man jedoch die Operation des Reducirens auf einem Nebenblatte ausführen, so gewährt eine Modification des Verfahrens bedeutende Vortheile. Man kann nämlich für alle drei Massstäbe einen und denselben Strahlenbüschel benützen und damit die drei Reductionsfiguren in eine einzige verschmelzen: Trägt man auf einer geraden Linie $L'L$ (Taf. I, Fig. 5) von einem Punkte O aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf, so kann die so entstehende Punktreihe jede von den drei Reihen X, Y, Z repräsentiren. Verbindet man jeden Theilpunkt mit einem ausserhalb $L'L$ beliebig gewählten Punkte C, so ist der so entstehende Strahlenbüschel perspectivisch zu der Punktreihe $L'L$ und daher projectivisch zu den drei Punktreihen Ξ, H, Z. Von diesen drei Punkt-

* Dasselbe kann übrigens auch aus den Reductionsformeln I abgeleitet werden.

reihen kann daher nach bekanntem Satze jede in perspectivische Lage zu dem Strahlenbüschel C gebracht werden, man hat sie nur so zu legen, dass drei ihrer Punkte in die ihnen entsprechenden Strahlen des Strahlenbüschels fallen. Als diese drei Punkte wählt man den Nullpunkt, den Fluchtpunkt und den unendlich fernen Punkt. — Aus dieser Erwägung ergiebt sich folgende Construction:

Auf einer Geraden $L'L$ trage von einem Punkte O aus nach beiden Seiten den Originalmassstab auf. Errichte auf $L'L$ in O eine Senkrechte und verbinde einen beliebigen Punkt C derselben mit sämmtlichen Theilpunkten der $L'L$. Schneide auf $L'L$ von O aus die Strecken $OG_1 = g_1$, $OG_2 = g_2$, $OG_3 = g_3$ ab, ziehe CG_1, CG_2, CG_3, schneide auf ihnen die Strecken $CU_1 = f_1$, $CU_2 = f_2$, $CU_3 = f_3$ ab, ziehe durch die drei Punkte U_1, U_2, U_3 Parallelen mit LL', welche die CO schneiden in Ω_1, Ω_2, Ω_3, ziehe durch Ω_1, Ω_2, Ω_3 Parallelen mit CG_1, CG_2, CG_3: so schneiden diese den Strahlenbüschel nach den drei Reductionsmassstäben Ξ, H, Z.

Der Vortheil dieser letztern Construction beruht hauptsächlich darin, dass man ein und dasselbe Netz zur Herstellung der Massstäbe für eine ganze Reihe von axonometrischen Grundconstanten-Systemen verwenden kann. (Ein solches Netz kann auch umgekehrt benützt werden, um aus dem Bilde die natürlichen Masse zu entnehmen.)

Kehren wir nunmehr zur Hauptconstruction (Taf. I, Fig. 2) zurück! Nachdem das scheinbare Axensystem construirt und sämmtliche Coordinaten reducirt sind, oder — um bildlich zu reden — nachdem das Baugerüste errichtet und die einzelnen Bausteine zugehauen sind, handelt es sich blos noch darum, dieselben zum Bau zusammenzufügen, — eine Operation, die in § 1 bereits besprochen wurde.

Sollten die Grenzen des Zeichnungsblattes der Construction Schwierigkeiten bereiten, so kann man sich dadurch helfen, dass man mit den in einem bestimmten Verhältnisse verjüngten Fluchtstrecken und reducirten Coordinaten die Construction am scheinbaren Axensystem ausführt; ist alsdann Π' das hierdurch gewonnene Bild von P, so verlängert man schliesslich $\Omega\Pi'$ im richtigen Verhältniss nach Π. Selbstverständlich wird man in solchen Fällen auch die Reductionsmassstäbe in verjüngtem Massstabe zeichnen, um die verjüngten reducirten Coordinaten direct zu erhalten.*

Soll das Bild einer durch ihre Gleichungen $\varphi(xyz) = 0$ und $\psi(xyz) = 0$ gegebenen Curve construirt werden, so construirt man die Bilder einzelner Punkte der Curve, indem man jedesmal eine Coordinate beliebig

* Den Ausführungen am Schlusse des § 5 zufolge wird dieses Verfahren häufig praktisch werden.

wählt und die zugehörigen zwei anderen aus den obigen zwei Gleichungen bestimmt. — Ist eine Fläche $F(xyz)=0$ abzubilden, so construirt man das Bild der Berührungscurve des vom Auge an die Fläche gelegten Berührungskegels, welche bestimmt ist durch die zwei Gleichungen

$$F(xyz)=0,$$

$$(x-a_1)\frac{\partial F}{\partial x}+(y-a_2)\frac{\partial F}{\partial y}+(z-a_3)\frac{\partial F}{\partial z}=0.$$

§ 4.

Elimination der Orientirungsconstanten.

Unsere neun Grundconstanten sind Functionen der sechs von einander unabhängigen Orientirungsconstanten. Diese Functionen sind in den Gleichungen IV—VI ausgedrückt. Eliminirt man nun aus diesen neun Gleichungen die sechs Orientirungsconstanten, so bleiben noch drei Beziehungen zwischen den neun Grundconstanten übrig. Eine derselben ist sofort ersichtlich, nämlich

VII. 16) $$w_{12}+w_{23}+w_{31}=360^0.$$

Die zwei anderen ergeben sich aus den in VI enthaltenen drei Gleichungen, wenn man in dieselben die aus IV und V folgenden Werthe

17) $$m_i=\frac{g_i}{\varkappa} \quad \text{und} \quad \mu_i=\frac{f_i}{1-\varkappa}$$

einsetzt. Führt man die Bezeichnung ein:

18) $$\lambda=\frac{\varkappa-1}{\varkappa}=\frac{\varrho}{r},$$

so erhält man zunächst:

19) $$\cos w_{ik}=\frac{f_i^2+f_k^2-\lambda^2(g_i^2+g_k^2)}{2f_if_k}$$

oder

VIII. 20) $$\lambda^2(g_i^2+g_k^2)=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik},$$

woraus schliesslich durch Elimination von λ^2 die gesuchten zwei Beziehungen folgen. Wir behalten jedoch die zweckmässigere Form VIII bei.

Diese Beziehungen lassen sich unmittelbar geometrisch deuten. Bezeichnen wir nämlich die Seiten des Gegenpunktendreiecks $G_1G_2G_3$ mit $\mathfrak{g}_{12}\,\mathfrak{g}_{23}\,\mathfrak{g}_{31}$ und die Seiten des Fluchtpunktendreiecks $F_1F_2F_3$ mit $\mathfrak{f}_{12}\,\mathfrak{f}_{23}\,\mathfrak{f}_{31}$, so ist:

21) $$\mathfrak{g}_{ik}^2=g_i^2+g_k^2,$$

22) $$\mathfrak{f}_{ik}^2=f_i^2+f_k^2-2f_if_k\cos w_{ik}.$$

Die in VIII enthaltenen drei Gleichungen sprechen also den Satz aus:

Gegenpunktendreieck und Fluchtpunktendreieck sind ähnlich.

Aus der geometrischen Bedeutung von λ (vergl. Gleichung 18) folgt ferner:

Das Fluchtpunktendreieck ist kleiner als das Gegenpunktendreieck, oder ihm congruent, oder grösser als dasselbe, je nachdem die Bildebene vor dem Coordinatenursprung liegt, oder durch denselben geht, oder hinter demselben liegt.

Unser Satz ergiebt sich übrigens auch direct aus der geometrischen Erwägung, dass drei durch das Auge mit den drei Coordinatenaxen gezogene Parallelen die Bildebene in den drei Fluchtpunkten F_1, F_2, F_3 schneiden, dass also die zwei Tetraeder $AF_1F_2F_3$ und $OM_1M_2M_3$ parallele Seitenflächen haben und folglich ähnlich sind. Ebenso sind die zwei Tetraeder $OG_1G_2G_3$ und $OM_1M_2M_3$ ähnlich. Hieraus folgt: Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind beide dem Spurendreieck ähnlich.

Aus der Aehnlichkeit des Fluchtpunktendreiecks mit dem Spurendreieck folgt weiter der Satz:

Die Winkel des Fluchtpunktendreiecks sind sämmtlich spitz. Erreicht ein Winkel den Grenzwerth 90^0, so wird auch noch ein zweiter Winkel $= 90^0$, die dritte Ecke fällt ins Unendliche.

Ist nun die Aufgabe, überhaupt ein perspectivisch richtiges Bild eines gegebenen Objects zu fertigen, ohne dass die Lage von Bildebene und Auge ausdrücklich festgesetzt ist, so können die Werthe der neun Grundconstanten beliebig gewählt werden, doch so, dass sie die Gleichungen VII und VIII befriedigen.

Aus unserm obigen Satze ergiebt sich unmittelbar folgende graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems:

Wähle die drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3 beliebig, construire aus je zweien derselben als Katheten rechtwinklige Dreiecke und construire aus den drei Hypotenusen g_{12}, g_{23}, g_{31} als Seiten ein Dreieck $G_1G_2G_3$. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt Ω mit den Ecken des Dreiecks, nehme die von den drei Verbindungslinien eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und irgend drei den drei Verbindungslinien proportionirte Strecken als Fluchtstrecken.

Soll ein Grundconstantensystem mittels Rechnung aufgestellt werden, so wählt man sechs Grundconstanten beliebig und bestimmt die drei übrigen mittels der Gleichungen VII und VIII. Der Willkürlichkeit der Wahl jener sechs Grundconstanten sind jedoch gewisse Schranken gesetzt: die Wahl ist so zu treffen, dass man für die übrigen Grundconstanten und ferner für die Orientirungsconstanten, wenn diese in den sechs willkürlich gewählten Grundconstanten ausgedrückt werden, reelle Werthe erhält.

Ein Blick auf Gleichung VIII zeigt, dass es zweckmässig sein wird, in jedem Falle die drei Grössen f_i willkürlich zu wählen. Es wird sich daher vorzugsweise um folgende zwei Fälle handeln:

1. wir wählen f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, λ willkürlich;
2. wir wählen f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3 willkürlich.

Die erste Annahme bietet keine Schwierigkeiten und führt unmittelbar zu folgendem Satze:

Zieht man (Taf. I, Fig. 6) in einer Ebene von einem Punkte Ω aus unter beliebigen Winkeln gegen einander drei Strecken von beliebiger Länge, jedoch so, dass das von den Endpunkten F_1, F_2, F_3 gebildete Dreieck spitzwinklig ist, so können die drei Strecken immer als das perspectivische Bild eines rechtwinkligen Axensystems und die drei Endpunkte als die Fluchtpunkte der drei Axen angesehen werden.

Die zugehörigen Gegenstrecken ergeben sich entweder durch Rechnung aus der Gleichung

23) $$\lambda^2 g_i^2 = f_i^2 + f_k f_l \cos w_{kl} - f_l f_i \cos w_{li} + f_i f_k \cos w_{ik}$$

24) $$= \tfrac{1}{2}(\mathfrak{f}_{ik}^2 - \mathfrak{f}_{kl}^2 + \mathfrak{f}_{li}^2),$$

oder durch folgende aus dieser Gleichung abgeleitete Construction:

Beschreibe über den drei Seiten des Dreiecks $F_1F_2F_3$ nach aussen Halbkreise, welche von den Verlängerungen der drei Höhen F_1V_1, F_2V_2, F_3V_3 des Dreiecks in $\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{A}_2$, $\mathfrak{A}_3$ geschnitten werden. Verbinde diese drei Punkte mit den Ecken des Dreiecks: so sind je zwei von derselben Ecke ausgehende Verbindungslinien gleich. Nehme irgend drei diesen Verbindungslinien proportionirte Strecken als Gegenstrecken.*

Dem zweiten obengenannten Falle widmen wir als dem wichtigeren eine ausführlichere Besprechung.

§ 5.

Willkürliche Wahl der Reductionsconstanten.

Werden f_i und g_i willkürlich gewählt, so giebt uns Gleichung 19) die Werthe von $\cos w_{ik}$ ausgedrückt in f_i und g_i, wenn uns gelingt, λ^2 in f_i und g_i auszudrücken. Dies geschieht dadurch, dass man die Werthe der Cosinusse aus 19) in die aus VII folgende Gleichung

25) $$\cos^2 w_{12} + \cos^2 w_{23} + \cos^2 w_{31} - 2\cos w_{12}\cos w_{23}\cos w_{31} - 1 = 0$$

einsetzt. Man erhält alsdann für λ^2 die Gleichung:

IX. 26) $$A\lambda^4 - 2B\lambda^2 + C = 0,$$

wo die Coefficienten A, B, C folgende Werthe haben:

---

* Vergl. zu dieser Construction die Bemerkung S. 17 Z. 4.

$$A = (g_1^2 + g_2^2)(g_2^2 + g_3^2)(g_3^2 + g_1^2),$$
$$B = f_1^2 g_1^2 (g_2^2 + g_3^2) + f_2^2 g_2^2 (g_3^2 + g_1^2) + f_3^2 g_3^2 (g_1^2 + g_2^2),$$
$$C = g_1^2 (f_2^2 - f_3^2)^2 + g_2^2 (f_3^2 - f_1^2)^2 + g_3^2 (f_1^2 - f_2^2)^2.$$

Die Discriminante dieser Gleichung: $\Delta = B^2 - AC$, lässt sich mit Benützung der in Gleichung 21) definirten Bezeichnungen ϑ_{12}, ϑ_{23}, ϑ_{31} auf folgende Form bringen:

27) $$\Delta = (g_1^2 g_2^2 + g_2^2 g_3^2 + g_3^2 g_1^2)(f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta_{12})(f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} - f_3\vartheta_{12})$$
$$(f_1\vartheta_{23} - f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta_{12})(-f_1\vartheta_{23} + f_2\vartheta_{31} + f_3\vartheta_{12}).$$

Der Willkürlichkeit der Wahl der f_i und g_i sind somit folgende Schranken gesetzt:

X. 28) $$f_i\sqrt{g_k^2 + g_l^2} + f_k\sqrt{g_l^2 + g_i^2} > f_l\sqrt{g_i^2 + g_k^2}.$$

Innerhalb dieser Schranken entsprechen aber jedem Werthsystem $f_1 f_2 f_3$, $g_1 g_2 g_3$ zwei Werthsysteme $w_{12} w_{23} w_{31}$, die sich aus der Gleichung

XI. 29) $$\cos w_{ik} = \frac{f_i^2 + f_k^2 - \lambda^2(g_i^2 + g_k^2)}{2 f_i f_k}$$

ergeben, wenn in dieselbe die aus Gleichung IX folgenden zwei Werthe von λ^2 eingesetzt werden.

Da ein perspectivisches Bild dem Auge nur dann einen mit dem Original vollkommen übereinstimmenden Eindruck macht, wenn beim Betrachten Auge und Bildebene in die richtige Lage im Raum gebracht werden, so ist es von Wichtigkeit, die Orientirungsconstanten, welche diese Lage bestimmen, ebenfalls auszudrücken als Functionen von f_i und g_i. Man erhält aus den Gleichungen II bis V mit Benutzung von 18) folgendes Formelnsystem:

XII. 30) $$m_i = (1 - \lambda) g_i,$$

XIII. 31) $$a_i = \frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2} + \frac{f_l^2}{g_l^2}\right) + \left(\frac{1}{g_k^2} + \frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2 - \frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda^2 \frac{1}{g_i}\left(\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{g_3^2}\right)},$$

XIV. 32) $$\varepsilon^2 = \frac{(1 - \lambda)^2}{\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{g_3^2}},$$

XV. 33) $$\cos\tau_i = \frac{\frac{1}{g_i}}{\sqrt{\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{g_3^2}}},$$

XVI. 34) $$r^2 = \frac{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2} + \frac{f_2^2}{g_2^2} + \frac{f_3^2}{g_3^2}\right) - 1}{\frac{1}{g_1^2} + \frac{1}{g_2^2} + \frac{1}{g_3^2}},$$

XVII. 35) $$\cos\sigma_i = \frac{\frac{1}{g_i^2}\left(\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)+\left(\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}\right)\left(\lambda^2-\frac{f_i^2}{g_i^2}\right)}{2\lambda\frac{1}{g_i}\sqrt{\left(\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}\right)\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}-\lambda^2\right)}},$$

XVIII. 36) $$tg\,\varphi = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{f_1^2}{g_1^2}+\frac{f_2^2}{g_2^2}+\frac{f_3^2}{g_3^2}\right)-2}.$$

Durch die seither von uns benützten Orientirungsconstanten wird sowohl Auge als Bildebene auf das Objectcoordinatensystem bezogen, wird also die relative Lage des Auges zur Bildebene nur mittelbar bestimmt. Es ist nun aber von besonderer Wichtigkeit, Auge und Bildebene in directe Beziehung zu setzen.

Eine ungefähre, *in praxi* häufig ausreichende Orientirung des Auges kann mittels des Tetraeders $AF_1F_2F_3$ geschehen, dessen Dreikant an der Spitze A ein Octant ist: Man construire in Gedanken über dem Fluchtpunktendreieck als Basis ein solches Tetraeder, bringe sodann die Bildebene in eine solche Lage, dass die Seitenkante AF_3 vertical steht, und bringe das Auge in den Punkt A.

Eine genauere Orientirung ist diejenige mittels Hauptpunkt (Fusspunkt der vom Auge auf die Bildebene gefällten Senkrechten) und Augdistanz (Abstand des Auges von der Bildebene). Bestimmt man die Lage des Hauptpunktes H in der Bildebene durch seine Entfernungen h_1, h_2, h_3 von den drei Fluchtpunkten, beziehungsweise durch die Verhältnisse dieser drei Entfernungen, und bezeichnet die Augdistanz AH mit d, so liefert das rechtwinklige Dreieck AHF_i, dessen Hypotenuse $AF_i = \lambda g_i$ und dessen Winkel $HAF_i = \tau_i$ ist, für h_i und d die Werthe:

XIX. 37) $$h_i = \lambda g_i \sqrt{\frac{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}} = \varrho\, g_i \sqrt{\frac{1}{g_k^2}+\frac{1}{g_l^2}},$$

wo ϱ ein unbestimmter Factor ist,

XX. 38) $$d^2 = \frac{\lambda^2}{\frac{1}{g_1^2}+\frac{1}{g_2^2}+\frac{1}{g_3^2}}.$$

Die geometrische Interpretation von XIX liefert den (auch direct einleuchtenden) Satz:

Der Hauptpunkt ist identisch mit dem Schnittpunkte der Höhen des Fluchtpunktendreiecks.

Um die Bildebene in die richtige Lage im Raume zu bringen, bemerke man, dass F_1F_2 parallel M_1M_2, also horizontal ist. Man stelle daher die Bildebene so, dass F_1F_2 horizontal und der Horizontalneigungswinkel der Bildebene $= \tau_3$ ist.

Die fünf Grössen τ_3, h_1, h_2, h_3, d, deren Kenntniss nach dem Vorhergehenden zur Orientirung von Bildebene und Auge ausreichend ist, können sämmtlich auch auf graphischem Wege bestimmt werden. Man vergl. hierzu Taf. I, Fig. 6. In derselben können die drei rechtwinkligen Dreiecke $F_i F_k \mathfrak{A}_l$ als die Umklappungen der drei Seitenflächen des Tetraeders $A F_1 F_2 F_3$ angesehen werden. H ist der Hauptpunkt, $H F_i = h_i$. Construirt man ein rechtwinkliges Dreieck $H V_3 \mathfrak{A}_0$ aus $H V_3$ als Kathete und $V_3 \mathfrak{A}_3$ als Hypotenuse, so ist $H \mathfrak{A}_0$ gleich der Augdistanz und Winkel bei $V_3 = \tau_3$.

Bezüglich einer rationellen Wahl der f_i und g_i mögen schliesslich noch folgende Winke genügen. Ueber den Einfluss ihrer absoluten Grösse bei feststehenden Verhältnissen folgt aus unseren Gleichungen unmittelbar folgender Satz:

In jedem Grundconstantensystem können die Reductionsconstanten nach Belieben proportional vergrössert oder verkleinert werden. Eine solche Vergrösserung oder Verkleinerung geht Hand in Hand mit einer proportionalen Vergrösserung oder Verkleinerung der Augdistanz. Dagegen hat sie keine Einwirkung auf die scheinbaren Axenwinkel, auf den Winkel τ_3 und auf die Verhältnisse von h_1, h_2, h_3.

Bei der Wahl der absoluten Grösse der Reductionsconstanten beachte man, dass die Augdistanz den Minimalwerth von 2,5 dm (Weite des deutlichen Sehens) nicht überschreiten sollte.

Was sodann den Einfluss der Verhältnisse der f_i und g_i anbelangt, so influiren die Grössen g_i vermöge ihrer Proportionalität mit den Axenabschnitten lediglich auf die Lage der Bildebene. Für die Wahl der Grössen f_i ist sodann die Lage des Auges, die sich in der relativen Lage des Punktes Ω zum Hauptpunkte geltend macht, massgebend. Hat man sich also für die Verhältnisszahlen der g_i entschieden, so erfolgt die Wahl der f_i mit Zuratheziehung der Gleichung XIX.

Als Beispiel diene das folgende, nach diesen Regeln aufgestellte Grundconstantensystem:

$$\begin{aligned} g_1 &= 4^{\text{dm}}, & f_1 &= -3^{\text{dm}}, & w_{12} &= 130^0\,36{,}5', \\ g_2 &= 5^{\text{dm}}, & f_2 &= -4^{\text{dm}}, & w_{23} &= 111^0\,53{,}5', \\ g_3 &= 10^{\text{dm}}, & f_3 &= -9^{\text{dm}}, & w_{31} &= 117^0\,30', \\ & & \lambda^2 &= 0{,}9908, & h_1 &= 2{,}654^{\text{dm}}, \\ & & \tau_3 &= 72^0\,39', & h_2 &= 3{,}995^{\text{dm}}, \\ & & d &= 2{,}968^{\text{dm}}, & h_3 &= 9{,}501^{\text{dm}}. \end{aligned}$$

§ 6.
Specialfälle.

Es ist leicht, die im Vorangehenden aufgestellten allgemeinen Formeln und Constructionen für die verschiedenen Perspectivarten zu specialisiren. Hierüber mögen folgende Andeutungen genügen.

1. Fällt Punkt Ω mit dem Hauptpunkte zusammen (also in den Schnittpunkt der Höhen des Fluchtpunktendreiecks), so haben wir den Specialfall der Orthogonalperspective (Centralstrahl senkrecht zur Bildebene). Zu den in VIII enthaltenen Gleichungen kommen alsdann noch zwei weitere Beziehungen zwischen den sechs Reductionsconstanten hinzu, die sich unmittelbar aus Gleichung XIX mit $f_i^2 = h_i^2$ ergeben Vermöge dieser Beziehung geht Gleichung XI über in die folgende:

$$39)\quad \cos w_{ik} = -\frac{1}{2\frac{f_i}{g_i}\frac{f_k}{g_k}}\sqrt{\left(-\frac{f_i^2}{g_i^2}+\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)\left(\frac{f_i^2}{g_i^2}-\frac{f_k^2}{g_k^2}+\frac{f_l^2}{g_l^2}\right)}.$$

2. Fällt die Ecke F_3 des Fluchtpunktendreiecks in Unendliche, so werden die Winkel bei F_1 und F_2 je $= 90^0$, und wir haben den Specialfall der malerischen Perspective (Bildebene vertical). f_3 und g_3 werden $= \infty$. Setzt man den Grenzwerth von $\frac{f_3}{g_3} = p$, so wird $\lambda = p$. Die Reductionsformel für die z-Coordinaten reducirt sich auf $\zeta = pz$. Die Gleichungen VIII gehen über in die folgenden:

$$40)\quad p^2(g_1^2+g_2^2) = f_1^2+f_2^2-2f_1f_2\cos w_{12},$$

$$41)\quad f_1\cos w_{31} = f_2\cos w_{23}.$$

Diesen Gleichungen zufolge modificirt sich die S. 13 besprochene graphische Bestimmung eines Grundconstantensystems folgendermassen (Taf. I, Fig. 7):

Wähle g_1, g_2, p beliebig. Construire ein rechtwinkliges Dreieck $\mathfrak{A}F_1F_2$ mit den im Verhältniss p verkürzten Strecken g_1 und g_2 als Katheten; F_1F_2 sei die Hypotenuse. Verbinde einen in der Ebene dieses Dreiecks beliebig liegenden Punkt Ω mit F_1 und F_2 und ziehe $\Omega\zeta$ senkrecht zu F_1F_2. Nehme die von $\Omega\zeta$ und den Rückverlängerungen von ΩF_1 und ΩF_2 eingeschlossenen Winkel als scheinbare Axenwinkel und ΩF_1 und ΩF_2 als Fluchtstrecken. — Fällt man $\mathfrak{A}H \perp F_1F_2$, so ist H der Hauptpunkt, $\mathfrak{A}H$ die Augdistanz.

Wählt man den Punkt Ω auf $\mathfrak{A}H$, so hat man den Specialfall der Escarpperspective* (die durch Centralstrahl und z-Axe gelegte

* Ich habe hier die Namen der einzelnen Perspectivarten von der Parallelperspective herübergenommen und unterscheide dann z. B. „cavalière Centralperspective“ und „cavalière Parallelperspective“. Für die von mir „Escarpperspective“ oder „escarpe Perspective“ genannte Perspectivart existirte seither kein mir convenirender Name. — Der Name „Vogelperspective“, der sonst wohl in den verschiedensten Bedeutungen gebraucht wird, erscheint mir zur Bezeichnung einer Perspectivart nicht geeignet, insofern er — ebenso wie sein Oppositum „Froschperspective“ — der Ausdruck für einen disparaten, innerhalb jeder einzelnen Perspectivart möglichen, Begriff ist. — Leider herrscht bezüglich der Benennungen der einzelnen Perspectivarten eine grosse Uneinigkeit und Verwirrung und erscheint eine Verständigung in diesem Punkte höchst wünschenswerth.

Ebene senkrecht zur Bildebene). Fällt $\mathfrak{Q}$ in den Punkt $\mathfrak{A}$, so wird die Escarpperspective zur Militärperspective (Horizontalneigung des Centralstrahls $= 45^0$).

Fällt noch ein zweiter Eckpunkt des Fluchtpunktendreiecks, z. B. F_2, ins Unendliche, so haben wir den Specialfall der Cavalierperspective (Bildebene parallel der yz-Ebene). f_2 und g_2 werden $= \infty$ und $\frac{f_2}{g_2} = \frac{f_3}{g_3} = p$. Winkel w_{23} wird $= 90^0$. Die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, f_1, g_1, p ist vollkommen willkürlich.

§ 7.

Uebergang zur Parallelperspective.

Wird $r = \infty$, so werden f_i und $g_i = \infty$, ihre Verhältnisse haben jedoch endliche Werthe. Setzt man den Grenzwerth

42) $$\frac{f_i}{g_i} = p_i,$$

so gehen die Reductionsformeln I über in

I'. 43) $$\xi = p_1 x, \quad \eta = p_2 y, \quad \zeta = p_3 z$$

und ergeben sich aus den Gleichungen IV' und V' für p_i die Werthe:

IV''. 44) $$p_i = \bar{v}_i \cos \tau_i.$$

Die Gleichungen II', III' und VI' bleiben in Giltigkeit. — Man bemerke, dass ε ganz ausfällt.

Die Constructionen am scheinbaren Axensystem vereinfachen sich wie folgt: Schneide auf der ξ-Axe die Strecke $\Omega\Xi = \xi$ ab, ziehe durch Ξ eine Parallele zur η-Axe und schneide auf ihr $\Xi\pi = \eta$ ab, ziehe endlich durch π eine Parallele zur ζ-Axe und mache auf ihr $\pi H = \zeta$.

In dem Massstabnetze (Taf. I, Fig. 5) werden $\Omega_i F_i$ sämmtlich parallel LL', ihre Abstände von C werden: $C\Omega_i = p_i . CO$.

An Stelle unserer seitherigen Grössen f_i und g_i treten nunmehr in der Parallelperspective deren Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i}$ und $\frac{g_i}{g_k}$. Die drei Verhältnisse $\frac{f_i}{g_i} = p_i$ sind die Reductionsconstanten der Parallelperspective. Die drei Verhältnisse $\frac{g_i}{g_k}$ spielen die Rolle von Hilfsgrössen, deren Beibehaltung bei der willkürlichen Wahl der Grundconstanten bedeutende Vortheile mit sich bringt. Um übrigens die Symmetrie unserer Formeln zu wahren, setzen wir

45) $$\frac{g_i}{g_k} = \frac{\gamma_i}{\gamma_k},$$

wo γ_1, γ_2, γ_3 endliche Grössen sein mögen.

Da nunmehr die neun Grössen p_1, p_2, p_3, $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}$, $\frac{\gamma_2}{\gamma_3}$, $\frac{\gamma_3}{\gamma_1}$, w_{12}, w_{23}, w_{31} Functionen der vier von einander unabhängigen Variabeln sind, welche die Richtung der Bildebene und der parallelen Sehstrahlen bestimmen, so bestehen fünf Relationen zwischen denselben. Von diesen ergeben sich zwei direct, nämlich die Winkelrelation VII und die Gleichung $\frac{\gamma_1}{\gamma_2}\frac{\gamma_2}{\gamma_3}\frac{\gamma_3}{\gamma_1} = 1$. Die drei übrigen ergeben sich aus VIII, wenn man bemerkt, dass für $\varrho = \infty$: $\lambda = 1$ wird und wenn man an Stelle von f_i überall $\frac{f_i}{g_i} g_i = \frac{f_i}{g_i} \gamma_i$ einsetzt.* Man erhält alsdann die drei Gleichungen:

VIII′. 46) $\gamma_i^2 + \gamma_k^2 = p_i^2\gamma_i^2 + p_k^2\gamma_k^2 - 2p_i p_k \gamma_i \gamma_k \cos w_{ik}$.

Wir dürfen nun vier Grundconstanten willkürlich wählen. Statt zwei Grössen p_i willkürlich zu wählen, können wir auch deren Verhältnisse — oder, wenn wir

47) $$p_i = \varrho \pi_i$$

setzen, die drei Grössen π_i beliebig nehmen. Dabei gewährt es bedeutende Vortheile, die π_i als rationale ganze Zahlen zu wählen. — Es sind nun folgende zwei Annahmen von besonderer Wichtigkeit:

1. wir wählen π_1, π_2, π_3, w_{12}, w_{23}, w_{31} (in Uebereinstimmung mit VII) willkürlich;
2. wir wählen π_1, π_2, π_3, γ_1, γ_2, γ_3 willkürlich.

Die erste Annahme ist für die allgemeine Parallelperspective die naturgemässeste und führt zu dem Pohlke'schen Theorem, sie bietet jedoch ungleich mehr Schwierigkeiten, als die zweite. Die zweite Annahme erledigt zwar wegen der Beibehaltung der Hilfsgrössen γ_i die allgemeine Parallelperspective nicht so direct wie die erste, erweist sich aber für die Anwendung auf Specialfälle ungleich fruchtbarer als jene. Sie erfordert nur eine einfache Modification unserer centralperspectivischen Resultate. Dieselbe besteht darin, dass man in den centralperspectivischen Formeln IX — XVIII

48) $$\lambda = 1$$

setzt und die Substitution

49) $$f_i = \frac{f_i}{g_i} g_i = p_i \gamma_i = \varrho \pi_i \gamma_i$$

anbringt. Bei diesem Verfahren liefert zunächst Gleichung IX für ϱ^2 die Gleichung

IX′. 50) $$\mathfrak{C}\varrho^4 - 2\mathfrak{B}\varrho^2 + \mathfrak{A} = 0,$$

wo die Coefficienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ folgende Werthe haben:

---

* Die Substitution von γ_i an Stelle von g_i ist erlaubt, da die Gleichungen nach g_i homogen sind.

$$\mathfrak{A} = (\gamma_1^2+\gamma_2^2)(\gamma_2^2+\gamma_3^2)(\gamma_3^2+\gamma_1^2),$$
$$\mathfrak{B} = \pi_1^2\gamma_1^4(\gamma_2^2+\gamma_3^2) + \pi_2^2\gamma_2^4(\gamma_3^2+\gamma_1^2) + \pi_3^2\gamma_3^4(\gamma_1^2+\gamma_2^2),$$
$$\mathfrak{C} = \gamma_1^2(\pi_2^2\gamma_2^2 - \pi_3^2\gamma_3^2)^2 + \gamma_2^2(\pi_3^2\gamma_3^2 - \pi_1^2\gamma_1^2)^2 + \gamma_3^2(\pi_1^2\gamma_1^2 - \pi_2^2\gamma_2^2)^2.$$

Die Untersuchung der Discriminante dieser Gleichung liefert die Bedingung

X′ 51) $$\pi_i\gamma_i\sqrt{\gamma_k^2+\gamma_l^2} + \pi_k\gamma_k\sqrt{\gamma_l^2+\gamma_i^2} > \pi_l\gamma_l\sqrt{\gamma_i^2+\gamma_k^2}.$$

Des Weitern gehen die Gleichungen XI, XV, XVII, XVIII über in die folgenden:

XI′. 52) $$\cos w_{ik} = \frac{p_i^2\gamma_i^2 + p_k^2\gamma_k^2 - (\gamma_i^2+\gamma_k^2)}{2p_ip_k\gamma_i\gamma_k} = \frac{\pi_i^2\gamma_i^2 + \pi_k^2\gamma_k^2 - \frac{1}{\varrho^2}(\gamma_i^2+\gamma_k^2)}{2\pi_i\pi_k\gamma_i\gamma_k},$$

XV′. 53) $$\cos\tau_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i}}{\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}}},$$

XVII′. 54)
$$\cos\sigma_i = \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(p_k^2+p_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2}+\frac{1}{\gamma_l^2}\right)(1-p_i^2)}{2\frac{1}{\gamma_i}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}\right)(p_1^2+p_2^2+p_3^2-1)}}$$
$$= \frac{\frac{1}{\gamma_i^2}(\pi_k^2+\pi_l^2) + \left(\frac{1}{\gamma_k^2}+\frac{1}{\gamma_l^2}\right)\left(\frac{1}{\varrho^2}-\pi_i^2\right)}{2\frac{1}{\varrho}\frac{1}{\gamma_i}\sqrt{\left(\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}+\frac{1}{\gamma_3^2}\right)\left(\pi_1^2+\pi_2^2+\pi_3^2-\frac{1}{\varrho^2}\right)}},$$

XVIII′. 55) $$tg\,\varphi = \sqrt{p_1^2+p_2^2+p_3^2-2} = \sqrt{\varrho^2(\pi_1^2+\pi_2^2+\pi_3^2)-2}.*$$

Modificirt man die allgemeinen centralperspectivischen Formeln für die in § 6 angedeuteten Specialfälle und wendet alsdann auf die modificirten Formeln die Substitutionen 48) und 49) an, so resultiren die bekannten parallelperspectivischen Specialformeln. Z. B. ergeben sich aus 39) unmittelbar die Weisbach'schen Formeln:

56) $$\cos w_{ik} = -\frac{1}{2\pi_i\pi_k}\sqrt{(-\pi_i^2+\pi_k^2+\pi_l^2)(\pi_i^2-\pi_k^2+\pi_l^2)}.$$

---

* Gleichung XVIII′ wurde schon von Pohlke gegeben. Vergl. Pohlke, Darst. Geom., 2. Aufl., S. 115.

Zweiter Abschnitt.

Perspectivische und projectivische Collineation im Raum.

(Zeitschrift für Mathematik und Physik XXI, S. 402 figg.)

(Hierzu Taf. I und II.)

Der zweite Abschnitt überträgt die im ersten Abschnitt gewonnenen Resultate auf die räumliche Projection und giebt damit die Grundzüge einer axonometrischen Theorie der Reliefperspective und der collinearen Verwandtschaft räumlicher Systeme. Die Leichtigkeit, mit welcher diese Uebertragung von Statten geht, oder umgekehrt die Einfachheit der Specialisirungen, durch welche die Theorie der Planperspective aus derjenigen der centrischen Collineation und diese aus der Theorie der projectivischen Collineation fliesst, dürfte ein Zeugniss für die Brauchbarkeit der Methode sein. Sie ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, welches die Abbildung des Coordinatensystems der Originalfigur repräsentirt. Bei Untersuchungen über collineare Verwandtschaft wird das Bildcoordinatensystem häufig beliebig angenommen, insofern dieselbe dargestellt wird durch drei lineare Relationen der allgemeinsten Form zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte. Den Connex zwischen dieser Darstellungsweise und unserer axonometrischen Methode stellen die §§ 13 und 14 her. Dabei wird beiläufig die collineare Abbildung eines Ellipsoids, namentlich seine Abbildung als Kugelfläche, besprochen. — § 12 giebt ein einfaches Criterium dafür, dass eine durch fünf Paare entsprechender Punkte gegebene Collineation eine centrische sei, und lehrt ein einfaches praktisches Verfahren, zwei solche Systeme in perspectivische Lage überzuführen, was jederzeit auf doppelte Weise (directe und inverse Lage) geschehen kann. — Der Unterschied zwischen gleichstimmiger und ungleichstimmiger Collineation wird durch die in den §§ 9, 12 und 14 enthaltenen Bemerkungen ins richtige Licht gesetzt. — § 15 bespricht die in der allgemeinen Theorie mit inbegriffene Collineation ebener Systeme. — Schliesslich wirft § 16

ein interessantes Licht auf die ganze Theorie, indem er die axonometrischen Coordinaten mit den Chasles'schen und projectivischen Coordinaten in Beziehung setzt.

§ 8.

Allgemeine Sätze über Collineation.

Es erscheint zweckmässig, die Fundamentalsätze über Collineation im Raume, auf die wir uns im Folgenden beziehen werden, als Einleitung vorauszuschicken.*

Zwei räumliche Systeme heissen projectivisch collinear, wenn sie so aufeinander bezogen sind, dass jedem Punkte des einen Systems ein und nur ein Punkt des andern Systems entspricht und dass solchen Punkten des einen Systems, die in gerader Linie liegen, stets solche Punkte des andern Systems entsprechen, die ebenfalls in gerader Linie liegen. Alsdann entspricht auch jeder Ebene wieder eine Ebene, jeder Fläche n^{ter} Ordnung wieder eine Fläche n^{ter} Ordnung.

Existiren in zwei collinearen räumlichen Systemen zwei einander entsprechende congruente Strahlenbündel, so liegt der Specialfall der centrischen oder perspectivischen Collineation vor. Man kann nämlich zwei solche Systeme in perspectivische Lage überführen, indem man jene zwei Strahlenbündel zur Coincidenz bringt. Zwei centrisch collineare Systeme in perspectivischer Lage haben ausser ihrem gemeinschaftlichen Strahlenbündel, dessen Centrum wir Collineationscentrum nennen, auch noch sämmtliche Punkte einer Ebene entsprechend gemein, welche wir die Collineationsebene nennen. Je zwei entsprechende Gerade beider Systeme müssen sich in einem Punkte der Collineationsebene schneiden, den wir die Spur der Geraden nennen.

Von zwei perspectivisch collinearen Figuren kann jede als die Reliefabbildung der andern angesehen werden. Denn die Eindrücke, welche beide einem im Collineationscentrum befindlichen Auge machen, sind identisch. Mit Rücksicht hierauf fassen wir von zwei collinearen Figuren

* Als wichtigste Originalarbeiten über Collineation im Raume vergleiche man: Möbius, Der barycentrische Calcul, Leipzig 1827, S. 301 flgg. — *Poncelet, Traité des propriétés projectives des figures.* Neue Ausgabe, *Paris 1865, Tome I,* S. 357 flgg. — Magnus, Sammlung von Aufgaben und Lehrsätzen aus der analytischen Geometrie des Raumes, Berlin 1837, S. 72 flgg. — Richelot, Ueber die einfachste Correlation in zwei räumlichen Gebieten, Crelle's Journal Bd. 70, S. 137 flgg. — Mägis, Ueber die allgemeinste eindeutige Correlation zweier räumlicher Gebilde, Königsberg 1868. — *Stephen Smith, On the Focal Properties of Homographic Figures, Procedings of the London Mathematical Society, Vol. II, 1869,* S. 196 flgg.

die eine als Original- oder Objectfigur, die andere als Bildfigur auf,* wobei jedoch ausdrücklich constatirt werden möge, dass es vollständig gleichgiltig ist, welche Figur als Original und welche als Bild genommen wird, und dass ein Tausch zwischen Original und Bild jederzeit vorgenommen werden kann.

Diejenigen Punkte des Bildsystems, welche den unendlich entfernten Punkten des Originalsystems entsprechen, nennen wir Fluchtpunkte. Dieselben liegen alle in einer Ebene, welche wir die Fluchtebene nennen und welche das Bild der unendlich fernen Ebene des Originalsystems repräsentirt. Alle Punkte des Originalsystems, welche den unendlich fernen Punkten des Bildsystems entsprechen, nennen wir Gegenpunkte; sie liegen alle in einer Ebene, der Gegenebene,** welche der unendlich fernen Ebene des Bildsystems entspricht. Fluchtebene und Gegenebene sind beide der Collineationsebene parallel, (denn die Schnittlinie der Fluchtebene mit der Collineationsebene ist der Fluchtebene und der unendlich fernen Ebene des Originalsystems entsprechend gemein, liegt also im Unendlichen).

Zu einer gegebenen Originalfigur ist die Bildfigur vollständig und eindeutig bestimmt, wenn die Lage des Collineationscentrums oder Auges, der Collineationsebene und der Fluchtebene in Beziehung zur Originalfigur gegeben ist. Man kann alsdann das Bild μ irgend einer Geraden m der Originalfigur auf folgende Weise finden: Construire (Taf. II, Fig. 1) die Spur M der Geraden m als Schnittpunkt derselben mit der Collineationsebene. Construire den Fluchtpunkt F als Schnittpunkt der Fluchtebene mit einer durch das Auge A zur Geraden m gelegten Parallelen. Dann ist MF das Bild μ.

Zieht man durch das Auge A eine Parallele zu μ, so schneidet diese die gegebene Gerade m in deren Gegenpunkt G. Da nun die vier Punkte $AFMG$ die Ecken eines Parallelogramms bilden, so folgt: Der Abstand des Auges von der Gegenebene ist gleich dem Abstande der Collineationsebene von der Fluchtebene.

§ 9.

Axonometrische Behandlung der Reliefperspective.

Gegeben sei irgend ein räumliches Object durch die auf ein rechtwinkliges Axencoordinatensystem O, xyz bezogenen Coordinaten seiner Punkte. Wir stellen uns die Aufgabe, dessen reliefperspectivisches Bild

---

* Wir übertragen diese Determination auch auf projectivisch collineare Systeme.

** Vergl S. 5 Anmerkung.

zu construiren, wenn die relative Lage von Auge, Collineationsebene und Fluchtebene gegen das Objectcoordinatensystem gegeben ist. Wir lösen diese Aufgabe wieder dadurch, dass wir zunächst das Bild der drei Coordinatenaxen und dann für jeden einzelnen Objectpunkt das Bild seines projicirenden Parallelepipedons construiren.

Das Bild der drei Coordinatenaxen sei der räumliche Dreistrahl $\Omega, \xi\eta\zeta$ (Taf. I, Fig. 1). Derselbe ist bestimmt durch die drei scheinbaren Axenwinkel, die wir wieder mit w_{12}, w_{23}, w_{31} bezeichnen, wobei aber nun

67) $$w_{12} + w_{23} + w_{31} < 360^0.$$

Im Uebrigen gelten die Ausführungen des § 1 Wort für Wort auch für die Reliefperspective. Wir haben wieder die Reductionsformeln:

I. 68) $$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}, \quad \zeta = \frac{f_3 z}{z - g_3},$$

wo f_i und g_i wieder die Abscissen der Fluchtpunkte und Gegenpunkte repräsentiren.

Ebenso behalten die in § 3 besprochenen graphischen Methoden der Coordinatenreduction, sowie die Constructionen am scheinbaren Axensystem, durch welche das Bild eines Punktes aus seinen reducirten Coordinaten erhalten wird, in der Reliefperspective ihre volle Giltigkeit. Nur sind jetzt Taf. I, Fig. 1b und Fig. 2 als planperspectivische Abbildungen der in Wirklichkeit räumlichen Figuren anzusehen.

Die Aufgabe kommt somit wieder darauf hinaus, die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i und g_i auszudrücken als Functionen der Orientirungsconstanten.

Die auf das Objectcoordinatensystem bezogenen Coordinaten des Auges seien a_1, a_2, a_3; die Axenabschnitte der Collineationsebene seien m_1, m_2, m_3, und die Axenabschnitte der mit ihr parallelen Fluchtebene qm_1, qm_2, qm_3. Wir haben also die sieben Orientirungsconstanten a_1, a_2, a_3, m_1, m_2, m_3, q.

Die drei Coordinatenaxen (Taf. II, Fig. 2a) mögen von der Collineationsebene in den Punkten M_1, M_2, M_3, von der Fluchtebene in den Punkten N_1, N_2, N_3, von der Gegenebene in den Punkten G_1, G_2, G_3 und von einer durch das Auge zu diesen drei Ebenen gelegten Parallelebene in den Punkten H_1, H_2, H_3 geschnitten werden. Dem am Schlusse von § 8 citirten Satze zufolge ist nun

69) $$H_i G_i = N_i M_i = m_i - q m_i.$$

Diese Bemerkung liefert uns die Mittel zur Berechnung der drei Gegenstrecken g_1, g_2, g_3. Die Gleichung der durch A gelegten Parallelebene ist zunächst:

der Planperspective näher erörtert wurde. Alle hieraus gezogenen Folgerungen gelten also auch für die Reliefperspective. Namentlich erinnern wir an die zwei graphischen Bestimmungen eines Grundconstantensystems (s. S. 13 und 14). Es tritt bei diesen Constructionen nur die eine Aenderung ein, dass Punkt ω nunmehr ausserhalb der Ebene des Fluchtpunktendreiecks anzunehmen ist.

Soll ein Grundconstantensystem mittelst Rechnung aufgestellt werden, so dürfen sieben Grundconstanten willkürlich gewählt werden. Man wählt entweder f_1, f_2, f_3, w_{12}, w_{23}, w_{31}, λ willkürlich und hat dann zur Bestimmung von g_1, g_2, g_3 die Gleichungen 23) oder 24), oder man wählt f_1, f_2, f_3, g_1, g_2, g_3, λ willkürlich und hat zur Bestimmung von w_{12}, w_{23}, w_{31} die Gleichungen 29).

Jedem Werthsysteme der Grundconstanten entsprechen zwei Bildsysteme, — ein mit dem Originalsystem gleichstimmiges und ein mit ihm ungleichstimmiges.

Bezeichnet man wieder den Fusspunkt der vom Auge auf die Ebene des Fluchtpunktendreiecks gefällten Senkrechten als Hauptpunkt und die Länge dieser Senkrechten als Augdistanz, so gilt Alles, was in der Planperspective (vergl. S. 16) über Hauptpunkt und Augdistanz gesagt wurde, auch für die Reliefperspective. Auch die Formeln XIX) und XX) behalten ihre Giltigkeit.

§ 10.

Malerische Perspective. — Bemerkungen über optische Wirkung.

Unter den Specialfällen verdient in erster Linie die malerische Perspective und deren Unterfall: die Cavalierperspective, Beachtung.

Was in § 6 hierüber bemerkt ist, behält in der Reliefperspective seine volle Giltigkeit. Namentlich beachte man die zwei Gleichungen 40) und 41) und die graphische Bestimmung eines malerisch-perspectivischen Grundconstantensystems (Taf. I, Fig. 7). Bei letzterer tritt nur die eine Aenderung ein, dass die auf einander senkrecht stehenden Geraden $F_1 F_2$ und $\omega\zeta$ nunmehr windschief sind. Taf I, Fig. 7 ist jetzt als planperspectivische Abbildung der in Wirklichkeit räumlichen Figur zu betrachten. — Bei der Cavalierperspective ist $w_{23} = 90^0$, die Wahl der übrigen Grundconstanten w_{12}, w_{31}, f_1, g_1, p ist vollständig willkürlich.

In der Kunst wird zu reliefperspectivischen Constructionen fast ausschliesslich die malerische Perspective verwendet; namentlich ist es die Cavalierperspective, welche die *in praxi* gebräuchlichsten Constructionsmethoden*

---

* Man vergl. hierüber: *Poudra, Traité de perspective-relief, Paris 1862.*

liefert. Ich glaube jedoch, dass auch eine schiefe Annahme der Collineationsebene in gewissen Fällen ihre volle Berechtigung hat. Die physiologische Seite der Frage, inwieweit die Annahme einer verticalen Stellung der Bildebene oder Collineationsebene in der Planperspective oder Reliefperspective nothwendig oder zweckmässig ist, wird nicht selten mit einer gewissen Leichtfertigkeit behandelt, und scheint mir daher ein genaueres Eingehen auf diesen Punkt — wenn auch von unserem eigentlichen Thema etwas abliegend — doch nicht überflüssig zu sein.

Der Grund dafür, dass im Allgemeinen die malerische Perspective unter allen Perspectivarten die naturgetreuesten Bilder liefert, liegt in dem Umstande, dass nur bei ihr verticale Linien sich als Parallelen darstellen, was mit unserer Gewohnheit, von verticalen Geraden einen parallelen Eindruck zu erhalten, harmonirt. Diese Gewohnheit aber findet ihre physiologische Erklärung in Folgendem: Hat die optische Axe des Auges beim Betrachten eines Objects eine horizontale Lage, so hat das Flächenelement der Netzhaut (gelber Fleck), auf welches das von den brechenden Medien des Auges entworfene Bildchen fällt, eine verticale Stellung. In diesem Falle ist also jenes inverse Bildchen ein malerisch-perspectivisches, in welchem alle *in natura* verticalen Linien sich als Parallelen abbilden; in diesem — aber nur in diesem — Falle kommen uns daher jene Linien als parallel zum Bewusstsein. Die genannte Stellung des Auges ist nun bei aufrechter Haltung des Kopfes die natürliche und deshalb gewöhnliche, und daher rührt es, dass unserem Auge verticale Linien allerdings für gewöhnlich einen parallelen Eindruck machen. Der parallele Eindruck hört jedoch auf, sobald wir mit schiefgestellter Augenaxe — von unten hinauf oder von oben herab — beobachten. Es entstehen in solchem Falle Netzhautbildchen, ähnlich jenen unnatürlichen Photographien architektonischer Objecte, die mit geneigter *Camera obscura* aufgenommen wurden.

Aus dem Gesagten geht hervor, dass bei der malerischen Perspective der Augpunkt so angenommen werden muss, dass von ihm aus das vertical aufgestellte Bild oder Relief mit horizontal gestellter Augenaxe bequem betrachtet werden kann. Diese Regel wird auch im Allgemeinen immer befolgt. Nur bei Abbildungen aus der Vogel- oder Froschperspective wird die Einhaltung derselben unmöglich, und es wird daher für solche die Bildebene häufig mit Vortheil geneigt angenommen. — Reliefabbildungen aus der Vogelperspective sind nun zwar äusserst selten, wohl aber treten solche aus der Froschperspective häufig auf, z. B. in den Fries-, Gibelfeld- und Deckenreliefs, und für diese dürfte sich daher aus den angeführten Gründen unter Umständen eine schiefe Annahme der Collineationsebene empfehlen. Da bei einem Relief dieses Genres noch der weitere günstige Umstand hinzukommt, dass der Standpunkt des Beschauers nicht willkürlich, sondern fast immer genau vorgezeigt ist, so

glaube ich, dass, wenn bei der Construction eines solchen Reliefs jener Punkt als Augpunkt und die Collineationsebene senkrecht zur Augenaxe des Beschauers gewählt würde, man überraschende Effecte erzielen könnte.*

§ 11.

Schiefwinkliges Objectcoordinatensystem.

Unseren seitherigen Betrachtungen haben wir stets ein rechtwinkliges Objectcoordinatensystem zu Grunde gelegt. Es ist jedoch nothwendig, unsere Untersuchungen für ein schiefwinkliges System zu erweitern. Im Wesentlichen ändert sich hierbei Nichts, nur die Formeln III), VI) und VIII) erleiden einige Modificationen.

Sind u_{12}, u_{23}, u_{31} die von den drei Coordinatenaxen eingeschlossenen Winkel, so erhalten die genannten Gleichungen folgende Gestalt:

III⁰. 80) $$\mu_i^2 = m_i^2 - 2\frac{m_i a_i}{\varkappa} + \frac{r^2}{\varkappa^2} - 2\frac{m_i}{\varkappa}(a_k \cos u_{ik} + a_l \cos u_{li}),$$

VI⁰. 81) $$\cos w_{ik} = \frac{\mu_i^2 + \mu_k^2 - m_i^2 - m_k^2 + 2 m_i m_k \cos u_{ik}}{2\mu_i \mu_k},$$

VIII⁰. 82) $$\lambda^2(g_i^2 + g_k^2 - 2 g_i g_k \cos u_{ik}) = f_i^2 + f_k^2 - 2 f_i f_k \cos w_{ik}.$$

Der letzten Gleichung zufolge gilt auch bei Zugrundelegung eines schiefwinkligen Coordinatensystems der Satz: „Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck sind ähnlich.“ Dagegen kommt der Satz, dass die Winkel dieser Dreiecke alle spitz sein müssen (vergl. S. 13), nunmehr in Wegfall.

§ 12.

Projectivische Collineation.

Die Aehnlichkeit von Fluchtpunktendreieck und Gegenpunktendreieck ist das charakteristische Merkmal der perspectivischen Collineation. Ohne diese Aehnlichkeit haben wir den allgemeinen Fall der projectivischen Collineation.

Wählt man also die Grössen u_{12}, u_{23}, u_{31}, g_1, g_2, g_3 und w_{12}, w_{23}, w_{31}, f_1, f_2, f_3 vollkommen willkürlich und bezieht irgend eine Originalfigur auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln u_{ik}, construirt sodann zu diesem eine Bildfigur mit Zugrundelegung von w_{ik} als scheinbaren Axenwinkeln, f_i als Fluchtstrecken und g_i als Gegen-

* Wenn Herr Poudra in dem oben citirten Werke (pag. 91) vorschlägt, bei Gibelfeldern die Horizontebene schief aufsteigend anzunehmen und dem Relief bei der Aufstellung eine leichte Neigung nach vorn zu geben, so muss ich diesem Vorschlage meine Zustimmung entschieden versagen, wiewohl ich glaube, dass ihn bei demselben ähnliche Gedanken wie die oben ausgesprochenen geleitet haben.

strecken, so ist die Bildfigur mit der Originalfigur projectivisch collinear, und zwar gleichstimmig oder ungleichstimmig collinear, je nachdem das Bildcoordinatensystem mit dem Originalcoordinatensystem gleichstimmig oder ungleichstimmig construirt wird.* Man kann sich dann umgekehrt die Bildfigur als ursprünglich denken, indem man sie auf das Cartesische Coordinatensystem mit den Axenwinkeln w_{ik} bezieht und die frühere Originalfigur aus ihr dadurch entstehen lässt, dass man u_{ik} als scheinbare Axenwinkel, g_i als Fluchtstrecken und f_i als Gegenstrecken nimmt.

Statt die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die willkürliche Annahme der Grundconstanten zu bestimmen, kann die Bestimmung auch dadurch geschehen, dass fünf beliebig gewählten Punkten des einen Systems, von denen keine vier in einer Ebene liegen, irgend fünf Punkte des andern Systems, von denen ebenfalls keine vier in einer Ebene liegen, als entsprechende zugewiesen werden.

Wir stellen uns dementsprechend die Aufgabe: Wenn fünf Paare entsprechender Punkte einer Collineation gegeben sind, 1. zu jedem sechsten Punkte des einen Systems den entsprechenden des andern Systems zu construiren; 2. die Beziehung aufzufinden, die zwischen den zwei gegebenen Punktsystemen stattfinden muss, damit die Collineation eine centrische sei; 3. vorausgesetzt, dass diese Beziehung stattfindet: die zwei Punktsysteme in perspectivische Lage überzuführen.

Zum Behuf der Lösung dieser Aufgaben müssen wir unsere axonometrischen Anschauungen von den seitherigen perspectivischen Fesseln befreien. Was wir bisher nur als reliefperspectivische Abbildung eines Cartesischen Coordinatensystems betrachtet haben, stellen wir nunmehr unabhängig von jenem als eine neue Art von Coordinatensystem auf. Wir führen hierfür den Namen „axonometrisches Coordinatensystem“ ein. Die Namen: Coordinatenursprung, Coordinatenaxen, Axenwinkel, erklären sich selbst. Statt des Namens „Fluchtpunkte“ führen wir den Namen „Knotenpunkte“ ein und nennen deren Abscissen „Axenlängen“. Den Namen „Fluchtpunkte“ reserviren wir ausschliesslich für die Bilder von unendlich fernen Punkten und verwenden nur in bestimmten Fällen Fluchtpunkte als Knotenpunkte. — Soll irgend ein Punkt E auf ein axonometrisches Coordinatensystem, dessen Ursprung O und dessen Knotenpunkte K_1, K_2, K_3 sind (Taf. II, Fig. 4), bezogen werden, so zieht man K_3E, welche die Ebene K_1OK_2 schneidet in e, zieht Oe, welche die Linie K_1K_2 schneidet in D, zieht endlich K_2e, K_1e und DE, welche die drei Axen schneiden in den Punkten E_1, E_2

* Dass der zunächst nur für die centrische Collineation (s. § 9) nachgewiesene Satz: „In zwei collinearen Gebilden sind entsprechende Dreistrahlen entweder sämmtlich gleichstimmig oder sämmtlich ungleichstimmig“, auch für die projectivische Collineation gilt, beweist sich aus dem am Schlusse dieses Paragraphen erwähnten Satze.

und E_3. Wir nennen diese letzteren Punkte die „Coordinatenpunkte“ und ihre Entfernungen von O die „axonometrischen Coordinaten“ des Punktes E.

Diese Construction lässt sich auch in folgender Form aussprechen: Um irgend einen Punkt E auf das axonometrische Coordinatensystem $O, K_1 K_2 K_3$ zu beziehen, legt man durch je zwei Knotenpunkte $K_i K_k$ und den Punkt E eine Ebene, welche die dritte Axe in dem Coordinatenpunkte E_l schneidet.

Wie umgekehrt ein Punkt im Raume aus seinen axonometrischen Coordinaten construirt wird, bedarf keiner weitern Erklärung.

Das Cartesische Coordinatensystem ist ein specieller Fall des axonometrischen: die Knotenpunkte sind die unendlich fernen Punkte der Axen.

Zwei axonometrische Coordinatensysteme mit gemeinschaftlichen Axen, aber verschiedenen Knotenpunkten nennen wir conaxial. Zu jedem axonometrischen Coordinatensystem existirt also ein conaxiales Cartesisches.

Es seien nun (Taf. II, Fig. 4) $O K_1 K_2 K_3 E$ fünf Punkte des einen von zwei collinearen Systemen, $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ die ihnen entsprechenden Punkte des andern. Es soll zu irgend einem sechsten Punkte P des ersten Systems der entsprechende Punkt Π des zweiten Systems construirt werden.

Wir wählen irgend einen der fünf Punkte des ersten Systems, z. B. O, als Ursprung, drei andere, z. B. $K_1 K_2 K_3$, als Knotenpunkte eines axonometrischen Coordinatensystems, auf das wir den fünften Punkt E nach der oben besprochenen Procedur beziehen. Mit den fünf Punkten $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ verfahren wir genau ebenso. Sind alsdann $E_1 E_2 E_3$ und $E_1 E_2 E_3$ die Coordinatenpunkte der Punkte E und E, so sind durch die Punkte $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ auf je zwei entsprechenden Axen zwei projectivische Punktreihen bestimmt. Um nun zu Punkt P des ersten Systems den entsprechenden Punkt Π des zweiten Systems zu construiren, beziehen wir Punkt P auf das lateinische Coordinatensystem, suchen zu seinen Coordinatenpunkten $P_1 P_2 P_3$ die entsprechenden Punkte $\Pi_1 \Pi_2 \Pi_3$ der drei griechischen Punktreihen* und construiren aus ihnen als Coordinatenpunkten den Punkt Π.**

Bei Anwendung dieser Construction auf eine grössere Anzahl von Punkten ist es häufig von Vortheil, die zwei Coordinatensysteme conaxial

---

* Man bringt zu dem Ende die zwei Punktreihen $O E_i K_i$ und $\Omega E_i K_i$ in perspectivische Lage, indem man sie so legt, dass die Punkte O und Ω zusammenfallen (vergl. § 3).

** Diese Construction ist übereinstimmend mit der schon von Möbius gegebenen; vergl. Möbius, Bar. Calcul. S. 329. Dagegen dürften die folgenden Constructionen neu sein.

zu ändern, in der Art, dass statt der Punkte $K_1 K_2 K_3$ und $K_1 K_2 K_3$ die Coordinatenpunkte irgend zweier anderer entsprechender Punkte als Knotenpunkte gewählt werden. Es können namentlich die den unendlich fernen Punkten der drei griechischen Punktreihen entsprechenden Punkte $G_1 G_2 G_3$ construirt und diese als Knotenpunkte des lateinischen Coordinatensystems benützt werden; alsdann bestimmen sich die Punkte des griechischen Systems durch Cartesische Coordinaten. Oder man kann umgekehrt die Punkte des lateinischen Systems durch Cartesische Coordinaten bestimmen und hat dann als Knotenpunkte im griechischen System die den unendlich fernen Punkten der lateinischen Axen entsprechenden Punkte $F_1 F_2 F_3$ zu nehmen.

Ueberhaupt empfiehlt es sich, die Punkte $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ gleich zu Anfang zu construiren,* indem sie die beste Auskunft über die Natur der collinearen Beziehung ertheilen. So ergiebt sich z. B. als Lösung der zweiten oben formulirten Aufgabe aus dem Vorangehenden unmittelbar der Satz:

Die nothwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass die durch die zwei Punktsysteme bestimmte Collineation eine centrische sei, besteht darin, dass die zwei Dreiecke $G_1 G_2 G_3$ und $F_1 F_2 F_3$ ähnlich sind.

Trifft dieses Criterium zu, so können die zwei Systeme durch folgende praktische Construction in perspectivische Lage gebracht werden (Taf. II, Fig. 2):

Errichte über dem Dreieck $G_1 G_2 G_3$ als Basis eine mit $F_1 F_2 F_3 \Omega$ ähnliche Pyramide $G_1 G_2 G_3 A$, und über dem Dreieck $F_1 F_2 F_3$ als Basis eine mit $G_1 G_2 G_3 O$ ähnliche Pyramide $F_1 F_2 F_3 A'$. Lege die zwei hierdurch entstandenen ähnlichen Gebilde (Doppelpyramiden) $G_1 G_2 G_3 OA$ und $F_1 F_2 F_3 A'\Omega$ so, dass die homologen Kanten parallel sind und dass die zwei Punkte A und A' in einen Punkt A zusammenfallen. Alsdann liegen beide Systeme perspectivisch und haben Punkt A als Collineationscentrum.

Man kann die zwei Doppelpyramiden in zwei verschiedenen Formen construiren: bei der einen liegen die beiden Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche, bei der andern auf entgegengesetzten Seiten. Bei der einen Form sind die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich und wer-

---

* Dies wird am zweckmässigsten auf graphischem Wege geschehen. Uebrigens bestimmen sich die Fluchtstrecken und Gegenstrecken auch leicht durch Rechnung: Sind k_i und $\varkappa_i$ die Abscissen der Punkte K_i und K_i, ferner e_i und ε_i die axonometrischen Coordinaten der zwei Punkte E und E, so erhält man mittelst der Formeln I):

83) $$f_i = \frac{\varkappa_i \varepsilon_i (k_i - e_i)}{k_i \varepsilon_i - \varkappa_i e_i}, \quad g_i = \frac{k_i e_i (\varkappa_i - \varepsilon_i)}{\varkappa_i e_i - k_i \varepsilon_i}.$$

den also in direct ähnliche Lage gebracht (Fig. 2b), bei der andern Form sind sie invers ähnlich und werden in invers ähnliche Lage gebracht (Fig. 2a). Zwei centrisch collineare räumliche Systeme können demnach jederzeit auf zwei verschiedene Arten in perspectivische Lage übergeführt werden. Da bei der Lage a) je zwei entsprechende Punkte der zwei Systeme auf der nämlichen —, bei der Lage b) auf verschiedenen Seiten vom Collineationscentrum liegen, so ist die Lage a) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden invers ähnlich sind) als directe —, die Lage b) (bei welcher die zwei Doppelpyramiden direct ähnlich sind) als inverse zu bezeichnen.*

Fig. 2a und 2b (Taf. II) zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diejenigen zwei Doppelpyramiden, bei welchen die Spitzen auf der nämlichen Seite der Grundfläche liegen, invers ähnlich sind; Fig. 3a und 3b (Taf. II) zeigt die zwei Lagen für den Fall, dass diese zwei Formen direct ähnlich sind. Im Falle der Fig. 2 ist die Collineation eine gleichstimmige, im Falle der Fig. 3 eine ungleichstimmige.

Der Beweis für die Richtigkeit unserer Construction für beide Lagen in beiden Fällen beruht darauf, dass von den zwei projectivischen Punktreihen auf je zwei entsprechenden Axen der Ursprung, der Fluchtpunkt und der unendlich ferne Punkt der einen Reihe resp. mit dem Ursprunge, dem unendlich fernen Punkte und dem Gegenpunkte der andern Reihe durch jene Construction thatsächlich in perspectivische Lage gebracht sind; damit liegt aber auch jedes vierte Paar entsprechender Punkte der zwei Punktreihen perspectivisch, also K_i mit K_i, ferner E_i mit E_i und daher auch E mit E.

Schliesslich möge noch der Satz erwähnt werden, dass zu zwei projectivisch collinearen Systemen jederzeit, und zwar auf fünffach unendlich verschiedene Weise ein drittes construirt werden kann, das mit beiden centrisch collinear ist. Am einfachsten wird die Bestimmung, wenn entweder die drei Axenwinkel des gesuchten Systems als Rechte gewählt, oder wenn drei Paare entsprechender Punkte der zwei gegebenen Systeme als Bilder von drei unendlich fernen Punkten des gesuchten Systems genommen und gleichzeitig als Knotenpunkte verwerthet werden.

---

* Findet die centrische Collineation bei directer Lage ihre praktische Verwerthung in der Reliefsculptur und in der decorativen Kunst, so hat die inverse Lage eine wichtige Bedeutung in der Optik, insofern das von einem Linsensystem entworfene Bild eines Objects mit dem Object gleichstimmig centrisch collinear in inverser Lage ist. Man vergl. hierüber die Abhandlung von Möbius: „Entwickelung der Lehre von dioptrischen Bildern mit Hilfe der Collineationsverwandtschaft", in den Berichten der königl. sächs. Gesellsch. d. Wissensch. zu Leipzig, math.-phys. Classe, 1855, S. 8 figg.

§ 13.

Transformation auf das conaxiale Cartesische Coordinatensystem. — Collineare Abbildungen eines Ellipsoids.

Von zwei projectivisch collinearen Figuren sei die Originalfigur auf das rechtwinklige Coordinatensystem O, xyz, die Bildfigur auf das axonometrische Coordinatensystem Ω, $F_1 F_2 F_3$ bezogen. Die collineare Beziehung beider Figuren sei bestimmt durch die neun Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i.

Sind nun $\xi\,\eta\,\zeta$ die axonometrischen Coordinaten irgend eines Punktes Π der Bildfigur, $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ die auf das conaxiale Cartesische System bezogenen Cartesischen Coordinaten desselben Punktes, so bestehen zwischen $\xi\,\eta\,\zeta$ und $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ einfache Beziehungen. Es ergeben sich nämlich aus der Bemerkung, dass z. B. ξ, f_2, f_3 die Axenabschnitte der durch $F_2 F_3$ und Π gelegten Ebene sind, dass folglich die Gleichung dieser Ebene in den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ lautet: $\frac{\mathfrak{x}}{\xi} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} = 1$, — die Relationen:

$$84)\quad \xi = \frac{\mathfrak{x}}{1 - \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1 - \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}, \quad \zeta = \frac{\mathfrak{z}}{1 - \frac{\mathfrak{x}}{f_1} - \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichungen I) ein, so erhält man folgende Beziehungen zwischen den Coordinaten xyz eines Punktes P der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\,\mathfrak{y}\,\mathfrak{z}$ des entsprechenden Punktes Π der Bildfigur:

$$85)\quad x = \frac{g_1 \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad y = \frac{g_2 \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}, \quad z = \frac{g_3 \frac{\mathfrak{z}}{f_3}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1}.$$

Als Beispiel für die Anwendung dieser wichtigen Relationen stellen wir uns folgende Aufgabe:

Gegeben sei im Originalsystem ein Ellipsoid

$$86)\qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Wie sind die axonometrischen Grundconstanten zu wählen, damit demselben als collineare Abbildung ein bestimmter Flächentypus, namentlich eine Kugelfläche, entspreche?

Die Anwendung unserer Formeln 85) auf die Gleichung 86) liefert für die Abbildung der Fläche die Gleichung:

$$87)\qquad \frac{g_1^2}{a^2}\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2} + \frac{g_2^2}{b^2}\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2} + \frac{g_3^2}{c^2}\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2} - \left(\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} + \frac{\mathfrak{z}}{f_3} - 1\right)^2 = 0$$

oder entwickelt:

88)
$$\frac{\mathfrak{x}^2}{f_1^2}\left(\frac{g_1^2}{a^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{y}^2}{f_2^2}\left(\frac{g_2^2}{b^2}-1\right)+\frac{\mathfrak{z}^2}{f_3^2}\left(\frac{g_3^2}{c^2}-1\right)$$
$$-2\frac{\mathfrak{x}\mathfrak{y}}{f_1 f_2}-2\frac{\mathfrak{y}\mathfrak{z}}{f_2 f_3}-2\frac{\mathfrak{z}\mathfrak{x}}{f_3 f_1}+2\frac{\mathfrak{x}}{f_1}+2\frac{\mathfrak{y}}{f_2}+2\frac{\mathfrak{z}}{f_3}-1=0.$$

Bezeichnen wir zum Behuf der Discussion dieser Gleichung die Determinante derselben mit A (so dass also

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

ist, wo nach bekannter Bezeichnungsweise a_{11}, $2a_{12}$, $2a_{13}$, $2a_{14}$, ... die Coefficienten von x^2, xy, xz, x, ... bedeuten), so ergiebt sich für A folgender Werth:

89)
$$A=-\frac{1}{f_1^2 f_2^2 f_3^2}\,\frac{g_1^2 g_2^2 g_3^2}{a^2 b^2 c^2}.$$

Hieraus folgt* vor Allem, dass A nie positiv werden kann, dass sich also ein Ellipsoid nie als Regelfläche, sondern nur als Ellipsoid, elliptisches Paraboloid oder elliptisches Hyperboloid abbilden kann.**

Welcher dieser drei Fälle eintritt, hängt davon ab, ob die Gegenebene das Originalellipsoid nicht schneidet oder berührt oder schneidet. Es sind also hierfür lediglich die drei Grössen g_i massgebend, und zwar ergiebt sich folgendes Criterium:

Die Abbildung ist ein Ellipsoid, Paraboloid oder Hyperboloid, je nachdem:

90)
$$\frac{a^2}{g_1^2}+\frac{b^2}{g_2^2}+\frac{c^2}{g_3^2}\gtreqless 1.$$

Fragen wir endlich nach den Bedingungen, die die Grundconstanten erfüllen müssen, damit sich das Ellipsoid speciell als Kugelfläche abbilde, so liefert die Vergleichung der Gleichung 88) mit der allgemeinen — auf das Cartesische System mit den Axenwinkeln $w_{12}\,w_{23}\,w_{31}$ bezogenen — Gleichung einer Kugel

$$\mathfrak{x}^2+\mathfrak{y}^2+\mathfrak{z}^2+2\mathfrak{x}\mathfrak{y}\cos w_{12}+2\mathfrak{y}\mathfrak{z}\cos w_{23}+2\mathfrak{z}\mathfrak{x}\cos w_{31}$$
$$-2p\mathfrak{x}-2q\mathfrak{y}-2r\mathfrak{z}+s=0$$

folgende Bedingungen:

91)
$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{f_1^2}\left(\dfrac{g_1^2}{a^2}-1\right)=\dfrac{1}{f_2^2}\left(\dfrac{g_2^2}{b^2}-1\right)=\dfrac{1}{f_3^2}\left(\dfrac{g_3^2}{c^2}-1\right)=W, \\ \cos w_{12}=-\dfrac{1}{f_1 f_2}\,\dfrac{1}{W},\quad \cos w_{23}=-\dfrac{1}{f_2 f_3}\,\dfrac{1}{W},\quad \cos w_{31}=-\dfrac{1}{f_3 f_1}\,\dfrac{1}{W}. \end{array}\right.$$

---

* Vergl. Hesse, Vorlesungen über analyt. Geometrie des Raumes, 3 Aufl., S. 465. (Die Determinante A ist dort mit C_0 bezeichnet.)

** Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 314.

Da hiernach vier Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können als weitere Bestimmungsgleichungen noch die Gleichungen VIII) hinzugefügt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen, dass jede Kugel als die Reliefperspective eines beliebigen Ellipsoids angesehen werden kann. — Oder es können die drei Grössen g_i willkürlich gewählt werden, womit die Aufgabe gelöst ist: Ein beliebiges Ellipsoid und eine dasselbe nicht reell schneidende Ebene so collinear abzubilden, dass das Ellipsoid sich als Kugelfläche darstellt und das Bild der Ebene ins Unendliche fällt.

§ 14.

Bestimmung der Collineation durch drei lineare Relationen zwischen den Coordinaten zweier entsprechender Punkte.

Die Leichtigkeit, mit welcher sich die Aufgabe des vorigen Paragraphen erledigte, ist eben durch das axonometrische Princip bedingt, nach welchem die Bildfigur auf dasjenige Coordinatensystem bezogen wird, dessen Axen die Abbildungen der Coordinatenaxen der Originalfigur sind. Bezieht man aber nun die Bildfigur auf ein vollkommen willkürliches Coordinatensystem XYZ, das wir, wie das Coordinatensystem der Originalfigur, rechtwinklig und mit diesem gleichstimmig annehmen wollen, so gehen die Formeln 85) über in Gleichungen von folgender Form:

92)
$$\left\{\begin{aligned} x &= \frac{a_1 X + a_2 Y + a_3 Z + a_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ y &= \frac{b_1 X + b_2 Y + b_3 Z + b_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}, \\ z &= \frac{c_1 X + c_2 Y + c_3 Z + c_4}{d_1 X + d_2 Y + d_3 Z + d_4}. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen repräsentiren den allgemeinsten analytischen Ausdruck für die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme und bilden häufig den Ausgangspunkt bei der Untersuchung der collinearen Verwandtschaft.** Es ergiebt sich nun für uns die Aufgabe, diese Bestimmungsart der Collineation mit unserer axonometrischen Methode in Beziehung zu setzen, d. h. es ergiebt sich die Aufgabe:

Wenn die collineare Beziehung zweier räumlicher Systeme durch die Formeln 92) gegeben ist, die neun axonometrischen Grundconstanten w_{ik}, f_i, g_i auszudrücken als Functionen der in jenen Gleichungen enthaltenen Coefficienten $a_i\, b_i\, c_i\, d_i$.***

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj., Tome I,* S. 396.

** Z. B. in den S. 23 citirten Arbeiten von Magnus, Richelot und Mägis

*** Da sich die Gleichungen 92) nicht ändern, wenn man sämmtliche 16 Coefficienten mit einem und demselben Factor multiplicirt, so kann einer dieser Coefficienten $= 1$ gesetzt werden, so dass alsdann ihre Anzahl sich auf 15 reducirt.

Wir beginnen die Lösung dieser Aufgabe damit, dass wir das Bildsystem transformiren auf dasjenige Cartesische Coordinatensystem $\mathfrak{x}\mathfrak{y}\mathfrak{z}$, dessen Axen die Bilder der Axen des Originalsystems sind.

Die auf das Coordinatensystem XYZ bezogenen Coordinaten des neuen Ursprungs seien $p_1 p_2 p_3$. Die Richtungswinkel der neuen Axen seien $\alpha_1\alpha_2\alpha_3$, $\beta_1\beta_2\beta_3$, $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$; zwischen den letzteren bestehen die Beziehungen:

$$93)\quad \begin{cases} \cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1, \\ \cos^2\beta_1 + \cos^2\beta_2 + \cos^2\beta_3 = 1, \\ \cos^2\gamma_1 + \cos^2\gamma_2 + \cos^2\gamma_3 = 1. \end{cases}$$

Alsdann haben wir die Transformationsformeln:

$$94)\quad \begin{cases} X = p_1 + \mathfrak{x}\cos\alpha_1 + \mathfrak{y}\cos\beta_1 + \mathfrak{z}\cos\gamma_1, \\ Y = p_2 + \mathfrak{x}\cos\alpha_2 + \mathfrak{y}\cos\beta_2 + \mathfrak{z}\cos\gamma_2, \\ Z = p_3 + \mathfrak{x}\cos\alpha_3 + \mathfrak{y}\cos\beta_3 + \mathfrak{z}\cos\gamma_3. \end{cases}$$

Wendet man nun diese Substitutionen auf die Gleichungen 92) an, so müssen die letzteren identisch werden mit den Gleichungen 85). Dies liefert folgende Bedingungsgleichungen:

$$95)\quad \begin{cases} a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 = 0, \\ b_1 p_1 + b_2 p_2 + b_3 p_3 + b_4 = 0, \\ c_1 p_1 + c_2 p_2 + c_3 p_3 + c_4 = 0; \end{cases}$$

$$96)\quad \begin{cases} b_1\cos\alpha_1 + b_2\cos\alpha_2 + b_3\cos\alpha_3 = 0, \\ c_1\cos\alpha_1 + c_2\cos\alpha_2 + c_3\cos\alpha_3 = 0, \\ c_1\cos\beta_1 + c_2\cos\beta_2 + c_3\cos\beta_3 = 0, \\ a_1\cos\beta_1 + a_2\cos\beta_2 + a_3\cos\beta_3 = 0, \\ a_1\cos\gamma_1 + a_2\cos\gamma_2 + a_3\cos\gamma_3 = 0, \\ b_1\cos\gamma_1 + b_2\cos\gamma_2 + b_3\cos\gamma_3 = 0; \end{cases}$$

$$97)\quad \begin{cases} -\frac{g_1}{f_1} = \frac{a_1\cos\alpha_1 + a_2\cos\alpha_2 + a_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{g_2}{f_2} = \frac{b_1\cos\beta_1 + b_2\cos\beta_2 + b_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{g_3}{f_3} = \frac{c_1\cos\gamma_1 + c_2\cos\gamma_2 + c_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}; \end{cases}$$

$$98)\quad \begin{cases} -\frac{1}{f_1} = \frac{d_1\cos\alpha_1 + d_2\cos\alpha_2 + d_3\cos\alpha_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{1}{f_2} = \frac{d_1\cos\beta_1 + d_2\cos\beta_2 + d_3\cos\beta_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}, \\ -\frac{1}{f_3} = \frac{d_1\cos\gamma_1 + d_2\cos\gamma_2 + d_3\cos\gamma_3}{d_1 p_1 + d_2 p_2 + d_3 p_3 + d_4}. \end{cases}$$

Aus den 18 Gleichungen 93), 95), 96), 97), 98) bestimmen sich nun die 18 Grössen $p_i\,\alpha_i\,\beta_i\,\gamma_i\,f_i\,g_i$. Schliesslich ergeben sich dann die drei Axenwinkel w_{ik} aus den Gleichungen

99)
$$\left\{\begin{aligned} \cos w_{12} &= \cos\alpha_1\cos\beta_1 + \cos\alpha_2\cos\beta_2 + \cos\alpha_3\cos\beta_3, \\ \cos w_{23} &= \cos\beta_1\cos\gamma_1 + \cos\beta_2\cos\gamma_2 + \cos\beta_3\cos\gamma_3, \\ \cos w_{31} &= \cos\gamma_1\cos\alpha_1 + \cos\gamma_2\cos\alpha_2 + \cos\gamma_3\cos\alpha_3. \end{aligned}\right.$$

Zum Behuf der Auflösung unserer Gleichungen führen wir folgende Bezeichnungen ein: Wir bezeichnen die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

100)
$$R = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, ferner die Unterdeterminanten der Determinante

101)
$$D_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

mit $\mathfrak{A}_1 \mathfrak{A}_2 \ldots \mathfrak{B}_1 \ldots$

Es liefern nun zunächst die Gleichungen 95) für die Ursprungscoordinaten — und die Gleichungen 96) und 93) für die Richtungswinkel folgende Werthe:

102)
$$p_i = \frac{D_i}{D_4};$$

103)
$$\left\{\begin{aligned} \cos^2\alpha_i &= \frac{\mathfrak{A}_i^2}{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}, \\ \cos^2\beta_i &= \frac{\mathfrak{B}_i^2}{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}, \\ \cos^2\gamma_i &= \frac{\mathfrak{C}_i^2}{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}. \end{aligned}\right.$$

Mit diesen Werthen erhält man sodann aus den Gleichungen 97), 98) und 99) für die axonometrischen Grundconstanten folgende Ausdrücke:

104)
$$\left\{\begin{aligned} g_1 &= -\frac{D_4}{A_4}, \\ g_2 &= -\frac{D_4}{B_4}, \\ g_3 &= -\frac{D_4}{C_4}; \end{aligned}\right.$$

105)
$$\left\{\begin{aligned} f_1 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2 + \mathfrak{A}_2^2 + \mathfrak{A}_3^2}}{A_4}, \\ f_2 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2 + \mathfrak{B}_2^2 + \mathfrak{B}_3^2}}{B_4}, \\ f_3 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2 + \mathfrak{C}_2^2 + \mathfrak{C}_3^2}}{C_4}; \end{aligned}\right.$$

$$106)\quad \left\{\begin{aligned} \cos w_{12} &= \frac{\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1+\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2+\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3}{\sqrt{\mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{A}_2^2+\mathfrak{A}_3^2}\,\sqrt{\mathfrak{B}_1^2+\mathfrak{B}_2^2+\mathfrak{B}_3^2}},\\ \cos w_{23} &= \frac{\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1+\mathfrak{B}_2\mathfrak{C}_2+\mathfrak{B}_3\mathfrak{C}_3}{\sqrt{\mathfrak{B}_1^2+\mathfrak{B}_2^2+\mathfrak{B}_3^2}\,\sqrt{\mathfrak{C}_1^2+\mathfrak{C}_2^2+\mathfrak{C}_3^2}},\\ \cos w_{31} &= \frac{\mathfrak{C}_1\mathfrak{A}_1+\mathfrak{C}_2\mathfrak{A}_2+\mathfrak{C}_3\mathfrak{A}_3}{\sqrt{\mathfrak{C}_1^2+\mathfrak{C}_2^2+\mathfrak{C}_3^2}\,\sqrt{\mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{A}_2^2+\mathfrak{A}_3^2}}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 105) und 106) können noch auf eine etwas andere Form gebracht werden. Bildet man nämlich nach dem Multiplicationstheorem das Quadrat von D_4 und bezeichnet die Unterdeterminanten der so entstehenden Determinante

$$107)\quad D_4^2 = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & q_{13}\\ q_{21} & q_{22} & q_{23}\\ q_{31} & q_{32} & q_{33}\end{vmatrix}$$

mit Q_{ik}, so ist z. B.

$$\mathfrak{A}_1^2+\mathfrak{A}_2^2+\mathfrak{A}_3^2 = Q_{11},$$
$$\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1+\mathfrak{A}_2\mathfrak{B}_2+\mathfrak{A}_3\mathfrak{B}_3 = Q_{12} \text{ u. s. f.}$$

Man erhält daher für f_i und $\cos w_{ik}$ folgende Ausdrücke:

$$108)\quad \left\{\begin{aligned} f_1 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{Q_{11}}}{A_4},\\ f_2 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{Q_{22}}}{B_4},\\ f_3 &= \pm\frac{R}{D_4}\frac{\sqrt{Q_{33}}}{C_4}; \end{aligned}\right.$$

$$109)\quad \left\{\begin{aligned} \cos w_{12} &= \frac{Q_{12}}{\sqrt{Q_{11}Q_{22}}},\\ \cos w_{23} &= \frac{Q_{23}}{\sqrt{Q_{22}Q_{33}}},\\ \cos w_{31} &= \frac{Q_{31}}{\sqrt{Q_{33}Q_{11}}}. \end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen 105) und 108) lassen die Vorzeichen von f_i unbestimmt. Dieselben bestimmen sich aus denjenigen der g_i, insofern f_i und g_i entgegengesetzte Vorzeichen haben.

Bezüglich der Axenwinkel w_{ik} muss noch entschieden werden, wie aus denselben das Bildcoordinatensystem zusammenzusetzen ist, ob gleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem, oder ungleichstimmig. D. h. es ist zu entscheiden, ob die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation eine gleichstimmige oder ungleichstimmige ist.

Das Bild des Dreistrahls o, xyz sei $\omega, \xi\eta\zeta$. Wir denken uns ein mit O, XYZ paralleles Coordinatensystem mit Ursprung in ω. Sind dann $X'Y'Z'$ die auf dieses System bezogenen Coordinaten eines auf $\omega\xi$ beliebig gewählten Punktes, ebenso $X''Y''Z''$ und $X'''Y'''Z'''$ die Coordinaten

zweier auf $\omega\eta$ und $\omega\zeta$ beliebig gewählter Punkte, so ist der Dreistrahl $\omega, \xi\eta\zeta$ mit O, XYZ gleichstimmig oder ungleichstimmig, je nachdem

110) $$\begin{vmatrix} X' & Y' & Z' \\ X'' & Y'' & Z' \\ X''' & Y''' & Z''' \end{vmatrix} \gtrless 1$$

ist. Es handelt sich nun darum, diese Determinante, die wir mit Δ bezeichnen wollen, auszudrücken in den Coefficienten $a_i b_i c_i d_i$.

Zwischen den Coordinaten unserer drei Punkte bestehen vermöge ihrer Lage auf den drei Strahlen $\omega\xi$, $\omega\eta$, $\omega\zeta$ folgende Beziehungen:

111) $$\left\{\begin{array}{l} b_1 X' + b_2 Y' + b_3 Z' = 0, \\ c_1 X' + c_2 Y' + c_3 Z' = 0, \\ c_1 X'' + c_2 Y'' + c_3 Z'' = 0, \\ a_1 X'' + a_2 Y'' + a_3 Z'' = 0, \\ a_1 X''' + a_2 Y''' + a_3 Z''' = 0, \\ b_1 X''' + b_2 Y''' + b_3 Z''' = 0. \end{array}\right.$$

Setzt man daher je eine Coordinate der drei Punkte $= 1$, so erhält man für Δ folgenden Werth:

112) $$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \frac{\mathfrak{A}_2}{\mathfrak{A}_1} & \frac{\mathfrak{A}_3}{\mathfrak{A}_1} \\ \frac{\mathfrak{B}_1}{\mathfrak{B}_2} & 1 & \frac{\mathfrak{B}_3}{\mathfrak{B}_2} \\ \frac{\mathfrak{C}_1}{\mathfrak{C}_3} & \frac{\mathfrak{C}_2}{\mathfrak{C}_3} & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{1}{\mathfrak{C}_3} \begin{vmatrix} \mathfrak{A}_1 & \mathfrak{A}_2 & \mathfrak{A}_3 \\ \mathfrak{B}_1 & \mathfrak{B}_2 & \mathfrak{B}_3 \\ \mathfrak{C}_1 & \mathfrak{C}_2 & \mathfrak{C}_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\mathfrak{A}_1}\frac{1}{\mathfrak{B}_2}\frac{1}{\mathfrak{C}_3} D_4^2.$$

Wir haben somit (weil O, XYZ mit o, xyz gleichstimmig) den Satz:

Die durch die Formeln 92) bestimmte Collineation ist eine gleichstimmige oder ungleichstimmige, je nachdem

113) $$\mathfrak{A}_1 \mathfrak{B}_2 \mathfrak{C}_3 \gtrless 1.$$

Diesem Criterium entsprechend ist nun das Bildcoordinatensystem entweder gleichstimmig oder ungleichstimmig mit dem Originalcoordinatensystem zu construiren.

Anmerkung. Substituirt man die obigen Ausdrücke in den Bedingungsgleichungen 90) und 91), so ist damit die Aufgabe gelöst: Welche Beziehungen müssen zwischen den Coefficienten einer linearen Substitution obwalten, damit einem im Originalsystem gegebenen Ellipsoid $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ im Bildsystem ein bestimmter Flächentypus (namentlich eine Kugelfläche) entspreche?

§ 15.

Collineation zwischen ebenen Systemen.

In der vorangehenden axonometrischen Theorie der collinearen Verwandtschaft von räumlichen Systemen ist die Collineation zwischen ebenen

Systemen mit einbegriffen, insofern man nur nothwendig hat, von den unseren Betrachtungen zu Grunde gelegten Coordinatensystemen immer nur eine Coordinatenebene, z. B. die xy-Ebene, bezw. $\xi\eta$-Ebene, zu berücksichtigen. Es mögen in dieser Beziehung folgende Andeutungen genügen:

Das axonometrische Coordinatensystem in der Ebene wird gebildet von zwei vom Ursprung O ausgehenden Axen mit den Knotenpunkten K_1 und K_2. Auf dasselbe wird ein Punkt E dadurch bezogen, dass man K_2E und K_1E zieht, welche die beiden Axen in den Coordinatenpunkten E_1 und E_2 schneiden; OE_1 und OE_2 sind die axonometrischen Coordinaten des Punktes E.

Die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Figuren kann dadurch bestimmt werden, dass man die fünf axonometrischen Grundconstanten $w_{12}f_1f_2g_1g_2$ willkürlich wählt, die Originalfigur auf ein Cartesisches Coordinatensystem O, xy bezieht und die nach den Formeln

$$\xi = \frac{f_1 x}{x - g_1}, \quad \eta = \frac{f_2 y}{y - g_2}$$

reducirten Coordinaten auf das axonometrische Coordinatensystem Ω, F_1F_2 mit w_{12} als Axenwinkeln und f_1f_2 als Axenlängen bezieht.

Dass zwei collineare ebene Systeme immer, und zwar auf unendlich verschiedene Weise, in perspectivische Lage gebracht werden können,* ergiebt sich folgendermassen:

Geht man von der perspectivischen Abbildung eines ebenen Systems aus, indem man die xy-Ebene eines rechtwinkligen Coordinatensystems O, xyz als Ebene des Originalsystems wählt, die Lage der Ebene des Bildsystems durch ihre drei Axenabschnitte $m_1m_2m_3$ und die Lage des Auges durch seine drei Coordinaten $a_1a_2a_3$ bestimmt, so erhält man in den Gleichungen II) bis VI) (S. 26) die fünf Grundconstanten $w_{12}f_1f_2g_1g_2$ ausgedrückt als Functionen der sechs Orientirungsconstanten $m_1m_2m_3a_1a_2a_3$. Will man alsdann umgekehrt die sechs Orientirungsconstanten als Functionen der fünf Grundconstanten ausdrücken, so bleibt eine der ersteren unbestimmt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch vier Paare entsprechender Punkte OK_1K_2E und ΩK_1K_2E gegeben, so ist das Verfahren analog mit dem in § 12 angegebenen. Die dort gelehrte Lösung der Aufgabe, zwei collineare Systeme in perspectivische Lage überzuführen, reducirt sich für ebene Systeme auf folgende Construction:

Beziehe die Punkte E und E auf die zwei axonometrischen Coordinatensysteme O, K_1K_2 und Ω, K_1K_2, ihre Coordinatenpunkte seien E_1E_2 und E_1E_2; construire für die zwei projectivischen Punktreihen

---

* Vergl. *Jacobi*, *„Theoria analytica generalis projectionis centralis“*, Crelle's Journal Bd. 8, S. 338.

OE_1K_1 und ΩE_1K_1 den Gegenpunkt G_1 und Fluchtpunkt F_1, desgleichen für die zwei Punktreihen OE_2K_2 und ΩE_2K_2 die Punkte G_2 und F_2; lege durch G_1G_2 (Taf. II, Fig. 2) unter beliebigem Winkel φ gegen die Ebene des Originalsytems eine Ebene und construire in dieser ein Dreieck G_1G_2A ähnlich $F_1F_2\Omega$; lege ebenso durch F_1F_2 unter demselben Neigungswinkel φ gegen die Ebene des Bildsystems eine Ebene und construire in ihr ein Dreieck F_1F_2A' ähnlich G_1G_2O; ziehe AO und $A'\Omega$ und bringe die zwei so entstandenen ähnlichen Tetraeder OG_1G_2A und $A'F_1F_2\Omega$ in ähnliche Lage, so dass Punkt A mit A' zusammenfällt.

Die zwei Tetraeder können sowohl direct ähnlich, als invers ähnlich construirt werden. Hierdurch sind zwei verschiedene Arten der perspectivischen Lage — eine (resp.) inverse und eine directe — bedingt, von denen jede einzelne durch Veränderung des Winkels φ beliebig variirt werden kann. — Mit $\varphi = 0$ oder $= 180^0$ fallen die zwei Systeme in eine und dieselbe Ebene. Demnach können zwei collineare ebene Systeme in einer und derselben Ebene auf vier verschiedene Arten in perspectivische Lage gebracht werden.* Die Figuren 5 (Taf. II) zeigen diese vier Lagen: Fig. a) und b) die zwei directen, Fig. c) und d) die zwei inversen Lagen, a) und c) mit $\varphi = 0$, b) und d) mit $\varphi = 180^0$.

Die Ausführungen der §§ 13 und 14 lassen sich ebenfalls mit Leichtigkeit auf ebene Systeme übertragen:

Die Transformationsformeln vom axonometrischen zum conaxialen Cartesischen Bildcoordinatensystem lauten:

114) $$\xi = \frac{\mathfrak{x}}{1 - \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}, \quad \eta = \frac{\mathfrak{y}}{1 - \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}.$$

Zwischen den Coordinaten xy eines Punktes der Originalfigur und den Cartesischen Coordinaten $\mathfrak{x}\mathfrak{y}$ des entsprechenden Punktes der Bildfigur bestehen die Beziehungen:

115) $$x = \frac{g_1 \frac{\mathfrak{x}}{f_1}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - 1}, \quad y = \frac{g_2 \frac{\mathfrak{y}}{f_2}}{\frac{\mathfrak{x}}{f_1} + \frac{\mathfrak{y}}{f_2} - 1}.$$

Als Criterium dafür, dass die Ellipse

116) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

sich im Bildsystem als Ellipse, Parabel oder Hyperbel abbilde, ergiebt sich:

---

* Vergl. die S. 23 citirte Abhandlung von Stephen Smith, S. 202.

117) $$\frac{a^2}{{g_1}^2}+\frac{b^2}{{g_2}^2}\lessgtr 1.$$

Für den Kreis erhält man die Bedingungen:

118) $$\frac{1}{{f_1}^2}\left(\frac{{g_1}^2}{a^2}-1\right)=\frac{1}{{f_2}^2}\left(\frac{{g_2}^2}{b^2}-1\right)=-\frac{1}{f_1 f_2 \cos w_{12}}.$$

Da hiernach drei Grundconstanten unbestimmt bleiben, so können z. B. die zwei Grössen g_i willkürlich gewählt werden. Damit ist der Poncelet'sche Satz* bewiesen: Eine Ellipse und eine sie nicht schneidende Gerade können stets so projicirt werden, dass die Ellipse sich als Kreis abbildet und dass das Bild der Geraden ins Unendliche fällt.

Ist die collineare Beziehung zwischen zwei ebenen Systemen durch die zwei linearen Relationen

119) $$\begin{cases} x=\dfrac{a_1X+a_2Y+a_3}{d_1X+d_2Y+d_3}, \\ y=\dfrac{b_1X+b_2Y+b_3}{d_1X+d_2Y+d_3} \end{cases}$$

gegeben, und bezeichnet man die Unterdeterminanten der Substitutionsdeterminante

120) $$R=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

mit $A_1 A_2 \ldots B_1 \ldots$, so drücken sich die fünf Grundconstanten folgendermassen in den Substitutionscoefficienten aus:

121) $$\begin{cases} g_1=-\dfrac{D_3}{A_3}, \\ g_2=-\dfrac{D_3}{B_3}, \end{cases}$$

122) $$\begin{cases} f_1=\pm\dfrac{R}{D_3}\dfrac{\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}{A_3}, \\ f_2=\pm\dfrac{R}{D_3}\dfrac{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}}{B_3}, \end{cases}$$

123) $$\cos w_{12}=-\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}\sqrt{{b_1}^2+{b_2}^2}}.$$

§ 16.

Schlusswort. Chasles'sche und projectivische Coordinaten.

Die in § 12 definirten axonometrischen Coordinaten stehen in naher Beziehung zu den allgemeinen projectivischen Coordinaten. Sie können nämlich als eine Modification der Chasles'schen Coordinaten** angesehen werden, welche ihrerseits einen Specialfall der — von Möbius

---

* Vergl. *Poncelet, Traité des propr. proj. des fig., Tome I,* S. 53.

** Für die Ebene findet man die ausführliche Behandlung dieser Coordinaten in *Chasles, Traité de Géométrie supérieure, Paris 1852,* S. 341 figg. Für den Raum ist das von Chasles in seiner Geschichte der Geometrie (s. die deutsche Ausgabe von Sohnke, Halle 1839, S. 282) aufgestellte allgemeinere Coordinatensystem in derselben Weise zu specialisiren, wie Chasles dies in seinem *Traité de Géom. sup.,* S. 341, für die Ebene ausgeführt hat.

angedeuteten, von v. Staudt ausgesprochenen und von Fiedler nutzbar gemachten und mit den tetrametrischen Coordinaten identificirten — allgemeinen projectivischen Coordinaten* repräsentiren.

Es sei nämlich O, $K_1 K_2 K_3$ ein axonometrisches Coordinatensystem, $k_1 k_2 k_3$ seien die Axenlängen, $e_1 e_2 e_3$ und xyz die axonometrischen Coordinaten zweier Punkte E und P. Bezeichnen wir nun mit $e_1^{(c)} e_2^{(c)} e_3^{(c)}$ und $x^{(c)} y^{(c)} z^{(c)}$ die auf dasselbe System bezogenen Chasles'schen Coordinaten der Punkte E und P, ferner mit $x^{(F)} y^{(F)} z^{(F)}$ die auf dasselbe System mit E als Einheitspunkt bezogenen projectivischen (Fiedler'schen) Coordinaten von P, so definiren sich die Chasles'schen und projectivischen Coordinaten durch folgende Gleichungen:

124) $$x^{(c)} = \frac{x}{k_1 - x}, \quad y^{(c)} = \frac{y}{k_2 - y}, \quad z^{(c)} = \frac{z}{k_3 - z};$$

125) $$x^{(F)} = \frac{x^{(c)}}{e_1^{(c)}} = \frac{\frac{x}{k_1 - x}}{\frac{e_1}{k_1 - e_1}}, \quad y^{(F)} = \frac{y^{(c)}}{e_2^{(c)}} = \frac{\frac{y}{k_2 - y}}{\frac{e_2}{k_2 - e_2}}, \quad z^{(F)} = \frac{z^{(c)}}{e_3^{(c)}} = \frac{\frac{z}{k_3 - z}}{\frac{e_3}{k_3 - e_3}}.$$

Sind $\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4$ die auf das Fundamentaltetraeder $O K_1 K_2 K_3$ mit E als Einheitspunkt bezogenen tetrametrischen Coordinaten von P (so dass also $\chi_i = \frac{\mathfrak{p}_i}{\mathfrak{e}_i}$ ist, wenn $\mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \mathfrak{p}_3 \mathfrak{p}_4$ und $\mathfrak{e}_1 \mathfrak{e}_2 \mathfrak{e}_3 \mathfrak{e}_4$ resp. die Abstände der Punkte P und E von den Ebenen $O K_2 K_3$, $O K_3 K_1$, $O K_1 K_2$, $K_1 K_2 K_3$ bedeuten), so ist:

126) $$\frac{\chi_1}{\chi_4} = x^{(F)}, \quad \frac{\chi_2}{\chi_4} = y^{(F)}, \quad \frac{\chi_3}{\chi_4} = z^{(F)}.$$

Ist eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte $O K_1 K_2 K_3 E$ und $\Omega K_1 K_2 K_3 E$ gegeben, so finden zwischen den axonometrischen, Chasles'schen und projectivischen Coordinaten zweier entsprechender Punkte P und Π folgende Beziehungen statt:

127) $$\xi = \frac{\varkappa_1 \varepsilon_1 (k_1 - e_1) x}{(k_1 \varepsilon_1 - \varkappa_1 e_1) x + k_1 e_1 (\varkappa_1 - \varepsilon_1)},$$ ** η und ζ entsprechend,

128) $$\xi^{(c)} = \frac{\varepsilon_1^{(c)}}{e_1^{(c)}} x^{(c)},$$

129) $$\xi^{(F)} = x^{(F)}.$$

So brauchbar sich auch die axonometrischen Coordinaten namentlich in constructiver Beziehung vermöge ihrer Handlichkeit und An-

---

* Vergl. Möbius, Bar. Calcul, S. 320 und 329; v. Staudt, Beiträge zur Geometrie der Lage, 2. Heft, Nürnberg 1857, S. 266; Fiedler, Ueber die projectivischen Coordinaten, in der Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft zu Zürich, Bd. 15, S. 152 figg., oder Fiedler, Darstellende Geometrie, Leipzig 1871, S 507 figg.

** Diese Gleichung folgt unmittelbar aus Gleichung I) in Verbindung mit 83). Die griechischen Buchstaben haben hier und im Folgenden für das griechische Punktsystem genau dieselbe Bedeutung, wie die gleichlautenden lateinischen Buchstaben für das lateinische System.

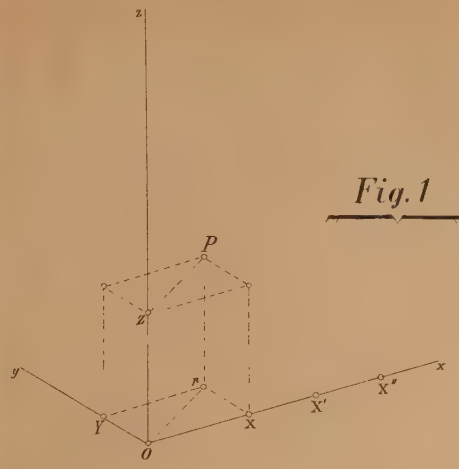
schaulichkeit erweisen, so ungeeignet zeigt sich häufig ihre Anwendung bei analytischen Untersuchungen (schon darum, weil die Ordnung einer Fläche nicht mit dem Grade ihrer Gleichung in axonometrischen Coordinaten übereinstimmt). Der Uebergang von axonometrischen Coordinaten zu Chasles'schen oder projectivischen oder tetrametrischen kann aber nun nach den obigen Formeln jeden Augenblick mit Leichtigkeit bewerkstelligt werden. Am besten wird man thun, alle vier Arten von Coordinaten gleichzeitig zu berücksichtigen, indem man sich die Modificationen, die die Form eines analytischen Ausdruckes beim Uebergange von einer Art zu einer andern erleidet, jederzeit präsent erhält und sich eine möglichste Fertigkeit und Ungenirtheit im Changiren aneignet.

Die in § 12 gegebene Lösung der Aufgabe: „Wenn eine Collineation durch fünf Paare entsprechender Punkte gegeben ist, zu jedem sechsten Punkte den entsprechenden zu construiren", ist übereinstimmend mit der schon von Möbius, dem scharfsinnigen Erfinder der tetrametrischen Coordinaten, gegebenen Construction. Sie fliesst jedoch bei Möbius nicht mit der innern Nothwendigkeit aus der Natur seines Coordinatensystems, als dies bei unserer axonometrischen Methode der Fall ist. Es ist bei Möbius weniger die Theorie der barycentrischen Coordinaten, als vielmehr die Theorie der geometrischen Netze, welche speciell jener Construction das Leben gegeben hat. Mit dieser Construction hat aber nun Möbius den Grundgedanken der allgemeinen projectivischen Coordinaten ausgesprochen und damit den Keim zu der Verschmelzung der constructiven und analytischen Methode gelegt, deren wir uns heute erfreuen. v. Staudt nahm den Möbius'schen Gedanken auf und verarbeitete ihn weiter, indem er die Doppelverhältnisse als Variable einführte.* Aber erst Fiedler wurde sich der eminenten Bedeutung dieser Coordinaten vollständig bewusst. Er hat das Ziel seines Strebens: die analytische und constructive Methode so enge miteinander zu verknüpfen, dass es sich bei ihrer Anwendung nicht mehr um ein *aut — aut*, sondern vielmehr um ein *sive — sive* handle, durch die Ausbildung der projectivischen Coordinaten auf's Schönste realisirt und sich dadurch das hohe Verdienst erworben, die Kluft, die zwischen beiden Methoden bestand, für immer geschlossen zu haben.

---

* Uebrigens deutet schon Möbius S. 330 an: „— die zwei oder drei Doppelverhältnisse, wodurch jeder andere Punkt der gegebenen Figur in Bezug auf die ersten vier oder fünf Punkte vollkommen bestimmt wird, ...".

Fig. 1



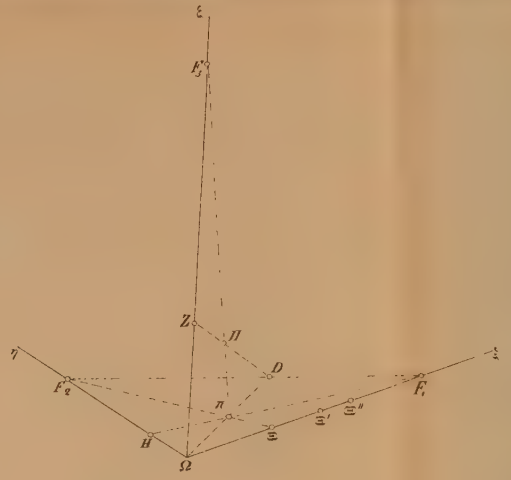


Fig. 2.

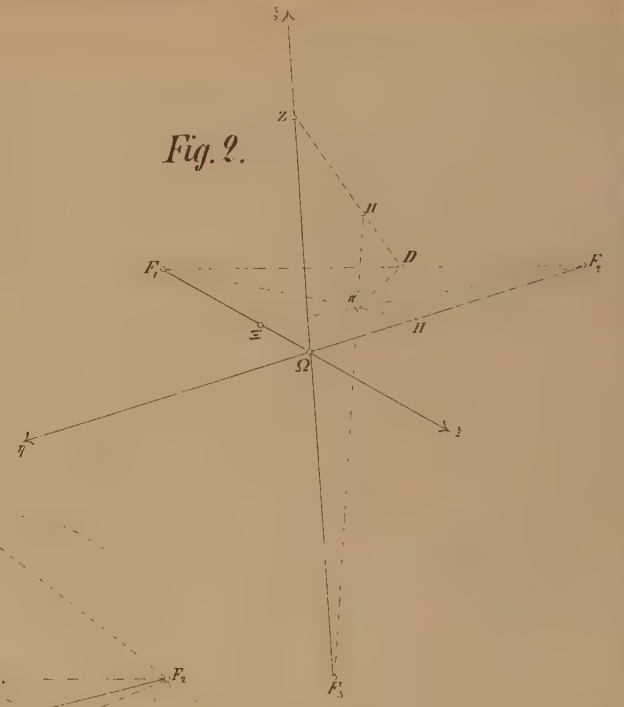


Fig. 3.

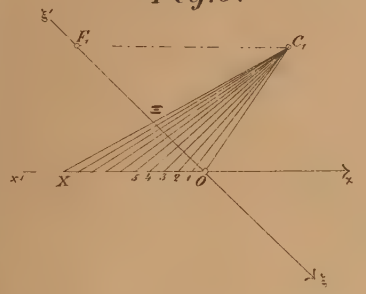
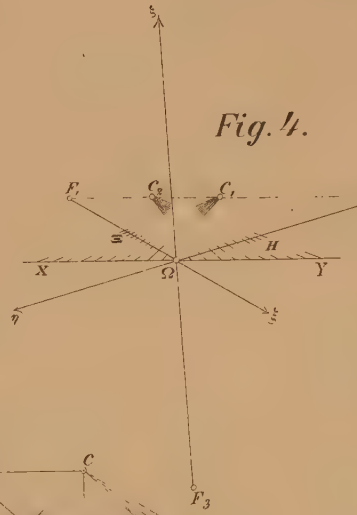


Fig. 4.



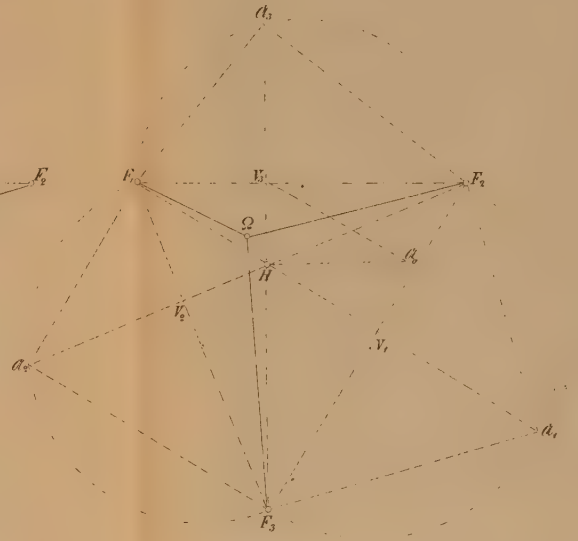


Fig. 5.

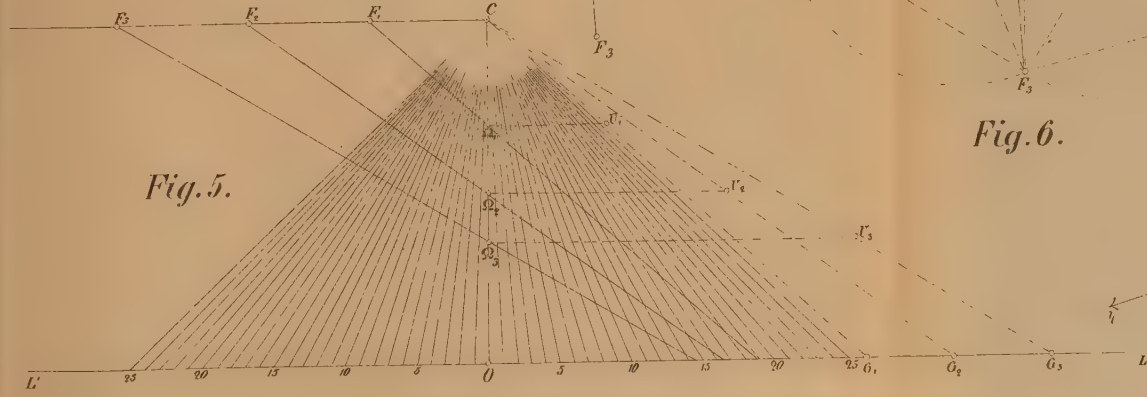
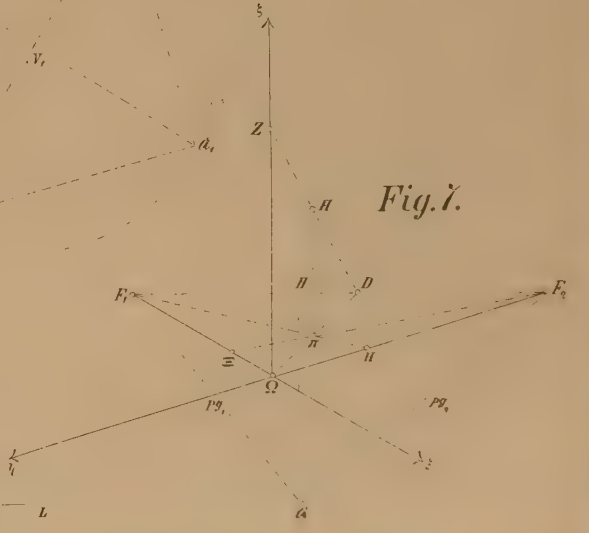


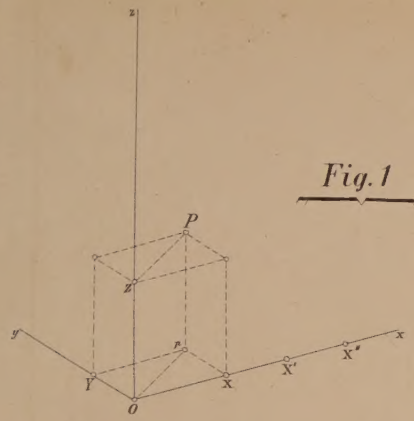
Fig. 6.

Fig. 7.



Lithogr. v. Georg Haase, Dresden

Fig. 1



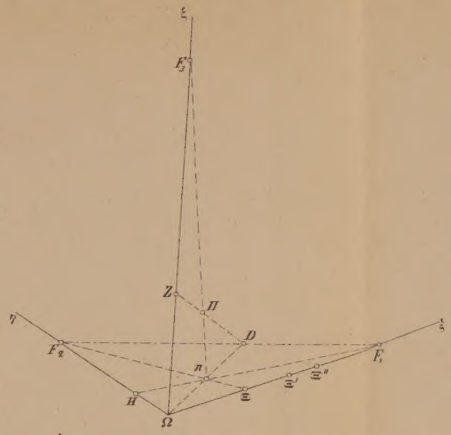


Fig. 2.

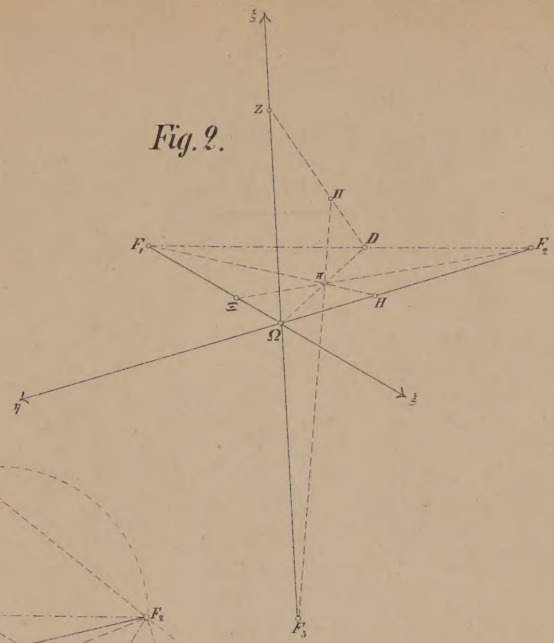


Fig. 3.

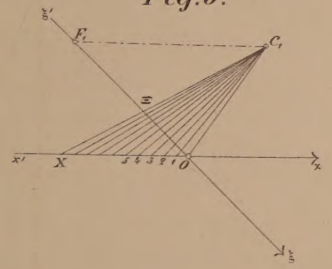
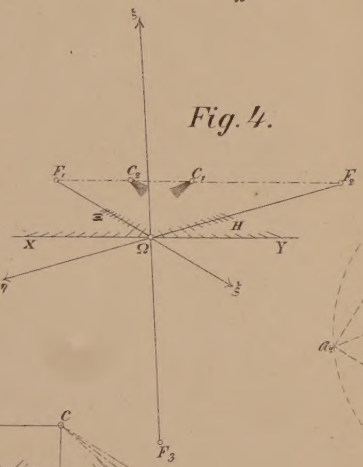


Fig. 4.



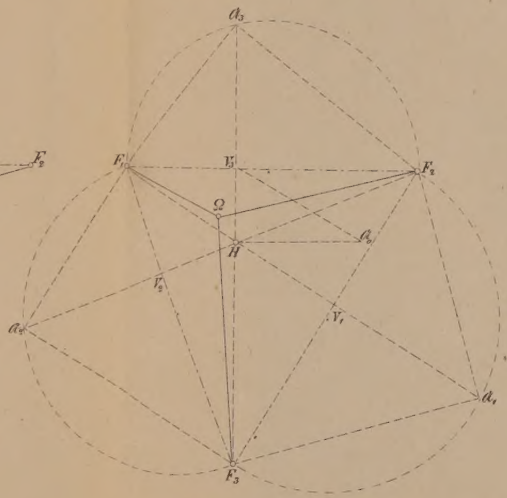


Fig. 6.

Fig. 5.

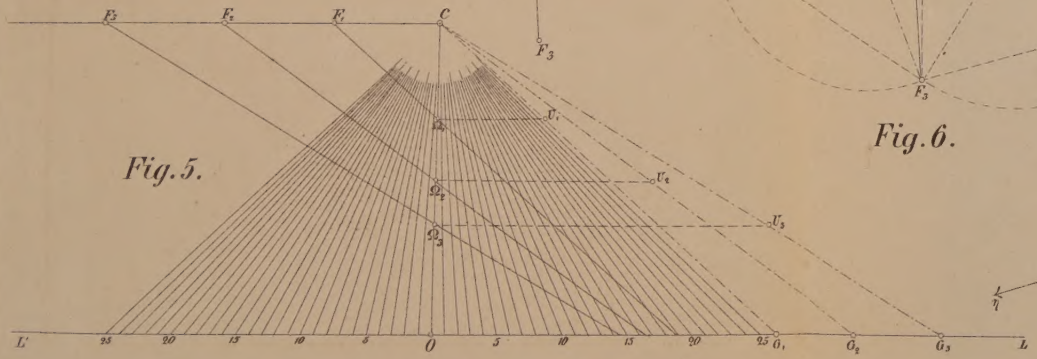
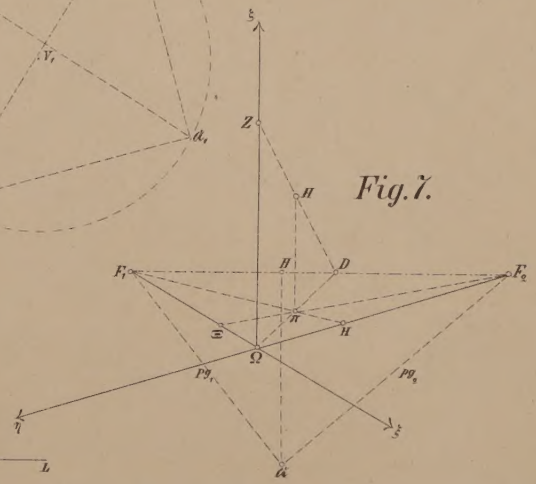


Fig. 7.



Lithogr. v. Georg Heise, Dresden.